

**Existenz isoperimetrischer Gebiete in
einer Klasse von unbeschränkten
Mengen
unter besonderer Berücksichtigung
des Paraboloids**

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von
Holger Näher

Saarbrücken
2006

Tag des Kolloquiums: 02. Februar 2007

Dekan: Prof. Dr. Thorsten Herfet

Mitglieder der Kommission:

Vorsitzender: Prof. Dr. Joachim Weickert

Erstgutachter: PD Dr. Michael Bildhauer

Zweitgutachter: Prof. Dr. Martin Fuchs

Wissenschaftlicher Mitarbeiter: Dr. Bernhard Burgeth

Schriftführer: PD Dr. Michael Breuß

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Herkunft des isoperimetrischen Problems	1
1.2	Der Inhalt der Arbeit	2
1.3	Der Aufbau der Arbeit	3
1.4	Danksagung	4
2	Das isoperimetrische Problem	5
2.1	Die Geschichte	5
2.2	Die exakte Fragestellung	6
2.3	Zwei verwandte Probleme	10
2.3.1	Ein ähnliches isoperimetrisches Problem	10
2.3.2	Der sitzende Tropfen	10
2.4	Der euklidische Fall	11
2.4.1	Der ganze n -dimensionale Raum	11
2.4.2	Der Halbraum	12
2.4.3	Die „Platte“	12
2.4.4	Der Quader	13
2.4.5	Die Kugel	14
2.4.6	Der Kegel	15
2.5	Der nicht-euklidische Fall	16
3	Beispiele und Heuristiken	19
3.1	Epigraphen	19
3.2	Mengen mit flachem Rand	22
3.3	Mengen mit flachem Rand und Abstandsbedingung	24
4	Formulierung und Beweis des Existenzsatzes	27
4.1	Definitionen und Vorbemerkungen	27

4.2	Formulierung und Beweis des Theorems	34
5	Das Paraboloid	55
5.1	Eine isoperimetrische Ungleichung	56
5.2	Normale Variationen	57
5.3	Charakterisierung der isoperimetrischen Gebiete	59
6	Schlussbemerkungen	61
6.1	Zusammenfassung und Ausblick	61
6.2	Abstract	62
A	BV-Funktionen	63
A.1	Definitionen und elementare Eigenschaften	63
A.2	Ein spezieller Approximationssatz	68
B	Regularitätstheorie	73
B.1	Die Arbeit von Gonzalez, Massari, Tamanini zur inneren Regularität	73
B.2	Die Arbeit von Grüter zur Randregularität	74
	Literaturverzeichnis	77

Abbildungsverzeichnis

2.1	Eine Halbkugel, ein Unduloid und ein Zylinder.	13
2.2	Kandidaten für isoperimetrische Mengen im Quader	14
2.3	Die Kugel mit einem von einer Kugelkappe begrenzten isoperimetrischen Gebiet.	14
2.4	Ein konvexer Kegel M_1 mit Öffnungswinkel α und ein allgemeiner Kegel M_2	15
2.5	Das Paraboloid mit einem isoperimetrischen Gebiet	17
3.1	Der Graph von ω	20
3.2	Die Menge Ω mit asymptotisch flachen Rand	22
3.3	Die Menge Ω als Subgraph der Normalparabel.	24
4.1	Ein Randpunkt mit dem verschobenen und rotierten Graphen.	28
4.2	Die Menge E' und drei mögliche Mengen E_V sowie die Vergleichskugel.	31
4.3	Eine Menge Ω , die bereits bzgl. $E' = \emptyset$ keine Volumenvergleichsbedingung erfüllt, vgl. 4.1.11.	33
4.4	Die Zerlegung einer Menge E_k durch Rechtecke im \mathbb{R}^2	45
4.5	Die Projektion einer Menge im Epigraphen sowie ein Punkt x mit dem ausgezeichneten Urbildpunkt x_p	49
5.1	Das Paraboloid mit einem Schnitt beim Radius r	59

Kapitel 1

Einleitung

„...es ist von einer gewöhnlichen Seifenblase viel mehr zu lernen,
als Menschen, die nur damit spielen, zumeist vermuten.“
(Sir Charles Vernon Boys, [Bo, S. 19])

1.1 Herkunft des isoperimetrischen Problems

Eines der einfachsten und faszinierendsten Spielzeuge für kleine Kinder ist wohl der Klassiker „Pustefix“. Schillernde Seifenblasen, an denen man sich kurze Zeit erfreuen kann und die dann wieder dem Sprichwort gemäß zerplatzen. Dieses Naturphänomen und die Erforschung durch Kinder ist bereits auf alten etruskischen Vasen dargestellt (siehe [HT, 5]). Nicht nur bei Seifenblasen, auch bei Einzellern, bei in Öl schwebenden Wassertropfen und vielen weiteren Beispielen aus der Natur ist die *isoperimetrische Eigenschaft der Kugel* zu erkennen:

Die Kugel hat unter allen Körpern des gleichen Volumens die geringste Oberfläche.

Ebenso gibt es die *isoperimetrische Eigenschaft des Kreises*:

Unter allen ebenen Figuren gleichen Flächeninhalts hat der Kreis den geringsten Umfang.

Vom Wortursprung aus dem Griechischen her bedeutet *isos* gleich und *perimetron* Umfang. Gesucht ist beim isoperimtrischen Problem somit unter allen Figuren gleichen Umfangs die mit größtem Flächeninhalt. Das in der Ebene duale Problem ist unter allen Figuren gleichen Flächeninhalts die mit kleinstem Umfang zu finden.

Eine Verallgemeinerung dieses Problems, welches ganz natürlich in der Praxis auftaucht, ist auf alten Stadtplänen zu erkennen. Der Stadtkern ist oftmals innerhalb einer runden Stadtmauer zu finden, es sei denn, die Stadt liegt an einem großen Fluss oder einem Gewässer. In diesem Fall hatte man eine natürliche Begrenzungslinie, die keine Baukosten verursachte und ebenfalls oft gut zu verteidigen war.

Oder denken wir an den so alltäglichen Vorgang des Geschirrspülens. Unter optimalen Bedingungen können wir einzelne Seifenblasen auf der Wasseroberfläche finden, die sich, wenn sie nahe genug an den Rand kommen, dort auf einmal „andocken“. Dabei entsteht aus einer ungefähren Halbkugel eventuell eine Viertelkugel (je nach Form des Spülbeckens). Auch in Gläsern lassen sich beim Spülen faszinierende Formen von Seifenblasen entdecken, die von Ecken regelrecht „angezogen“ zu sein scheinen.

Dies motiviert bereits, die Frage nach einem optimalen Gebiet (also der Seifenblase) nicht nur in der Ebene oder dem Raum zu stellen, sondern auch in einer Halbebene bzw. einem Halbraum (vgl. Wasseroberfläche) oder sogar möglichst allgemeinen Gebieten (vgl. die Seifenblase in einem beliebigen Glas). Dabei wird nur der Teil des Randes gemessen, welcher im Innern der Menge liegt, analog zur Stadtmauer die nicht am Fluss entlang gebaut wurde.

1.2 Der Inhalt der Arbeit

Das Hauptziel besteht darin, die Existenz isoperimetrischer Gebiete im Paraboloid zu zeigen und damit ein Ergebnis von Benjamini und Cao aus dem Jahr 1996 in natürlicher Weise auf eine höhere Dimension zu verallgemeinern. Dies wird erreicht, indem die Existenz in einer großen Klasse von Mengen gezeigt wird, zu der insbesondere das Paraboloid dazugehört. Daneben werden auch einige Resultate von Ritoré und Rosales aus dem Jahr 2004 mitbehandelt.

1.3 Der Aufbau der Arbeit

Das Kapitel 2 wird zunächst einen kurzen Überblick über das isoperimetrische Problem in der Geschichte geben, angefangen vom ersten Beweisversuch durch Zenodorus bis hin zum ersten vollständigen Beweis durch Weierstraß. Mit Hilfe der Theorie der Mengen von endlichem Perimeter wird danach das isoperimetrische Problem exakt formuliert werden. Im Anschluss an eine kurze Darstellung zweier verwandter Probleme werden wir dann viele Beispiele kennenlernen, wie isoperimetrische Gebiete aussehen können bzw. in welchen Fällen die Gestalt noch weitgehend ungeklärt ist. Insbesondere werden wir auch feststellen, dass bereits die Existenz isoperimetrischer Gebiete in unbeschränkten Mengen in den meisten Fällen noch völlig unklar ist.

In Kapitel 3 behandeln wir erneut Beispiele. Im Unterschied zum vorherigen Kapitel betrachten wir aber nur unbeschränkte Mengen, in denen keine isoperimetrischen Gebiete existieren. Die jeweils ausgenutzte Eigenschaft, um die Nicht-Existenz zu beweisen, gibt uns dann Hinweise auf mögliche Voraussetzungen für die Existenz von isoperimetrischen Gebieten. Deshalb trägt dieses Kapitel auch das Wort Heuristiken im Titel; denn daraus stellen wir Vermutungen an, welche Forderungen wir an die Mengen stellen sollten.

In Kapitel 4 werden wir die Hinweise aus dem vorherigen Kapitel aufgreifen, indem wir zwei geometrische Eigenschaften formulieren, die von den Gegenbeispielen nicht erfüllt wurden. Der sich anschließende Existenzsatz wird dann zeigen, dass dies in der Tat bereits geeignete Eigenschaften sind, um auf isoperimetrische Gebiete schließen zu können.

In Kapitel 5 wird zum Abschluss dann nochmal ein etwas genauerer Blick auf das Paraboloid geworfen. Insbesondere werden einige Regularitätsaussagen bewiesen wie Beschränktheit und Abschätzungen an den topologischen Typ.

In Kapitel 6 wird nur eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse in Deutsch und Englisch gegeben.

Im Anhang A werden grundlegende Eigenschaften von BV-Funktionen und Caccioppoli-Mengen zusammen getragen. Insbesondere wird dort ein spezieller Approximationssatz diskutiert, welcher in der gängigen Literatur nur selten zu finden ist.

Der Anhang B schließlich behandelt bereits bekannte Regularitätssätze aus der Literatur. Durch eine genaue Analyse der Beweise werden wir erkennen, dass diese teilweise in einer viel größeren Allgemeinheit gelten, als sie meist formuliert werden.

1.4 Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle zuerst Herrn Prof. Dr. Michael Grüter nennen, unter dessen Anleitung ich die Ergebnisse dieser Arbeit fand. Ich danke ihm für das interessante geometrische Thema und viele Diskussionen und Gespräche, die wir nicht nur über Mathematik, sondern auch über Dinge wie Kino und Literatur führten. Leider hat er die Fertigstellung der Ausarbeitung nicht mehr miterleben können.

Ich danke Herrn PD Dr. Michael Bildhauer, der mich danach weiter betreute, sowie Herrn Prof. Dr. Martin Fuchs.

Ebenso gilt mein Dank Frau Christa Peters, die mir nicht nur bei Fragen zu \LaTeX , sondern in vielen Situationen an der Universität geholfen hat. Frau Dr. Alice Keller und Herrn Roland Müller gilt mein besonderer Dank für Hilfe in vielen Fragen zur deutschen Rechtschreibung.

Am Schluss, aber wie es so schön heißt: nicht zuletzt, gilt mein Dank auch meiner Familie und meinen Freunden, ganz besonders Hildegard.

Kapitel 2

Das isoperimetrische Problem

In diesem Kapitel werden wir zunächst einen Blick auf die Geschichte des isoperimetrischen Problems werfen, insbesondere auf den ersten Beweisversuch im antiken Griechenland. Danach werden wir das Problem mathematisch exakt formulieren, wobei es für uns „das“ isoperimetrische Problem gar nicht geben wird, sondern immer das isoperimetrische Problem *für* ein konkret gegebenes Gebiet. Nach einem kurzen Exkurs über zwei verwandte Probleme behandeln wir danach viele Beispiele, in denen das isoperimetrische Problem jeweils mehr oder weniger vollständig gelöst ist.

2.1 Die Geschichte

Einer der Ersten, der sich mit einem Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft von Kreis bzw. Kugel beschäftigte, war der griechische Mathematiker Zenodorus, der etwa 200 bis 140 v.Chr. gelebt hat (siehe [CR]). Sein Aufsatz „Über isometrische Figuren“ ist leider nicht erhalten, wird aber von Pappus (etwa 290 bis 350 n.Chr.) in seinen acht Büchern „Synagoge“ (zu deutsch etwa „Sammlung“) zur griechischen Geometrie aufgegriffen. Demnach bewies Zenodorus:

Unter allen Polygonen gleichen Umfangs und gleicher Seitenzahl hat das reguläre Polygon den größten Flächeninhalt. Der Kreis hat einen größeren Flächeninhalt als jedes reguläre Polygon mit gleichem Umfang.

Die Kugel hat größeres Volumen als jeder regelmäßige Körper gleicher Oberfläche. Von zwei verschiedenen regelmäßigen Körpern gleicher Oberfläche hat der mit der größeren Seitenzahl das größere Volumen.

Dabei sind die regelmäßigen Körper natürlich die fünf platonischen Körper *Tetraeder*, *Würfel*, *Oktaeder*, *Dodekaeder* und *Ikosaeder*.

Leider hatte der Beweis eine Lücke, die erst Weierstraß im 19. Jahrhundert schließen konnte.

Der zweite Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises in der Ebene wurde im Jahr 1842 von J. Steiner (siehe [Ste]) veröffentlicht. Auch in diesem Beweis gab es eine erst Jahre später erkannte Lücke: Die Existenz einer Lösung wurde angenommen, aber nicht bewiesen. Erst als erkannt wurde, dass Variationsprobleme im Allgemeinen keine Lösung besitzen müssen, wurde diese Lücke geschlossen, so dass der erste vollständige Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf Weierstraß und für die Kugel auf H.A.Schwarz zurückgeht (siehe [Sch]). Alle diese Beweise beinhalten bereits Verfahren, die sich im Laufe der Zeit als sehr nützlich erwiesen: Symmetrisierungen. Damit war das isoperimetrische Problem in der Ebene und im Raum vollständig gelöst.

2.2 Die exakte Fragestellung

Bisher wurde meist von Flächeninhalt und Volumen gesprochen: Zu gegebenem Volumen wurde ein Gebiet in unserer gegebenen Menge Ω gesucht, dessen Lebesgue-Maß \mathcal{L}^n gerade dem vorgegebenen Volumen und dessen Flächeninhalt \mathcal{H}^{n-1} des Randes innerhalb von Ω minimal ist. Diese Begriffe sind jedoch zunächst in ihrem engen klassischen Verständnis ungeeignet, da die richtigen Konvergenzbegriffe dazu fehlen.

Als geeigneter Kontext haben sich insbesondere die Mengen von endlichem Perimeter oder Caccioppoli-Mengen erwiesen. Eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften findet sich im Anhang A.

Die korrekte Formulierung des isoperimetrischen Problems zu einer gegebenen Menge Ω ist daher für uns:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Lösung des *isoperimetrischen Problems* zum Volumen V mit $V \in [0, \mathcal{L}^n(\Omega)]$ ist eine Menge $E \subset \Omega$ mit $\mathcal{L}^n(E) = V$ und

$$\int_{\Omega} |D\varphi_E| = \inf_{\substack{H \subset \Omega \\ \mathcal{L}^n(H) = V}} \int_{\Omega} |D\varphi_H|.$$

Definition 2.2.1. Eine Menge $E \subset \Omega$ dieser Gestalt, dass heißt mit $\mathcal{L}^n(E) = V$ und

$$\int_{\Omega} |D\varphi_E| = \inf_{\substack{H \subset \Omega \\ \mathcal{L}^n(H) = V}} \int_{\Omega} |D\varphi_H|,$$

heißt isoperimetrisches Gebiet zum Volumen V in Ω .

Bemerkung 2.2.2. Betrachten wir zunächst einmal eine offene und beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand, und ein $V \in [0, \mathcal{L}^n(\Omega)]$. Zu einem beliebigen Punkt $y \in \Omega$ betrachten wir die Kugeln $B_r(y) \cap \Omega$. Deren Volumen wächst monoton und stetig mit dem Radius. Daher gibt es eine Kugel $B_R(x) \cap \Omega$ mit Volumen V . Diese hat endlichen Perimeter, das Infimum in der Definition besitzt also einen endlichen reellen Wert. Daher existiert eine Minimalfolge von Caccioppoli-Mengen (vgl. Bem. 2.2.4) E_k mit $\mathcal{L}^n(E_k) = V$ und

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I := \inf_{\substack{H \subset \Omega \\ \mathcal{L}^n(H) = V}} \int_{\Omega} |D\varphi_H|.$$

Nach A.1.10 gibt es eine in $L^1(\Omega)$ konvergente Teilfolge, also eine Menge E mit $\varphi_{E_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi_E$ und $\mathcal{L}^n(E) = V$. Nach A.1.6 ist $\int_{\Omega} |D\varphi_E| \leq I$, somit also $\int_{\Omega} |D\varphi_E| = I$ und die Menge E ist ein isoperimetrisches Gebiet zum Volumen V .

Wenn wir nun die Beschränktheit von Ω nicht mehr fordern, dann gilt die obige Argumentation nur noch lokal. Wir finden also eine Menge E mit $\int_{\Omega} |D\varphi_E| \leq I$, aber es konvergiert $\varphi_{E_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi_E$ nur noch in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$! Somit ist nur $\mathcal{L}^n(E) \leq V$, und die Argumentationskette bricht an dieser Stelle ab.

Der Fall einer unbeschränkten Menge Ω lässt sich also nicht mit der direkten Methode der Variationsrechnung behandeln, denn unsere Schwierigkeit besteht genau darin, zu zeigen, dass $\mathcal{L}^n(E) = V$ gilt.

Bemerkung 2.2.3. Wie wir im Folgenden noch sehen werden, sind die isoperimetrischen Gebiete im ganzen \mathbb{R}^n die Kugeln. Aber beispielsweise die Menge

$$B_1(0) \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} \{(i, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n\}$$

unterscheidet sich von der Menge $B_1(0)$ weder in Volumen noch in Perimeter, ist also ebenfalls nach unserer bisherigen Definition ein isoperimetrisches Gebiet. Mit einem isoperimetrischem Gebiet erhalten wir daher eine Vielzahl solcher Gebiete, die sich von dem gegebenen nur auf Nullmengen unterscheiden. Dies möchten wir eingrenzen, um Mengen wie die obige auszuschließen. Aufgrund von A.1.14 fordern wir für isoperimetrische Gebiete daher immer, dass sie in der Form der dort beschriebenen äquivalenten Menge \tilde{E} gegeben sind, dass also

$$0 < \mathcal{L}^n(\overline{E} \cap B_\rho(x)) < \mathcal{L}^n(B_1(0))\rho^n \quad (2.1)$$

gilt für alle $x \in \partial E$ und alle $\rho > 0$.

Allerdings ist damit noch keine Eindeutigkeit gegeben in dem Sinne, dass sowohl die Menge $B_1(0)$ als auch die Menge $\overline{B_1(0)}$ diese Bedingung erfüllen, eine Mehrdeutigkeit, die wir aber zulassen werden. \diamond

Bemerkung 2.2.4. In der Formulierung des isoperimetrischen Problems kann man sich ohne Einschränkung direkt auf den Fall zurückziehen, dass sowohl E als auch H Caccioppoli-Mengen sind. Für eine Menge H ist dies sofort klar, da andernfalls der Perimeter unendlich wird. Um einzusehen, dass auch E endlichen Perimeter hat, genügt es, eine einzige Caccioppoli-Menge des erforderlichen Volumens anzugeben. Dazu betrachtet man die Kugeln vom Radius r um den Nullpunkt und schneidet diese mit Ω . Das Volumen dieser Mengen ist damit eine monotone und stetige Funktion, die von Null gegen $\mathcal{L}^n(\Omega)$ wächst, insbesondere existiert eine solche Menge, die Volumen V hat. Diese Menge ist somit eine zulässige Menge endlichen Perimeters für die rechte Seite, somit hat E also endlichen Perimeter. \diamond

Bemerkung 2.2.5. Hier und im Folgenden steht Volumen für das n -dimensionale Maß in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit und Flächeninhalt für das $(n - 1)$ -dimensionale Maß. Im Fall des \mathbb{R}^n ist das Volumen also

durch das n -dimensionale Lebesgue-Maß \mathcal{L}^n und der Flächeninhalt durch das $(n - 1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß \mathcal{H}^{n-1} gegeben. Für glatte Mengen wird der Flächeninhalt des Randes von E auch durch den Perimeter $\int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_E|$ gemessen, bzw. der Flächeninhalt des Randes von E im Innern einer Menge Ω wird durch $\int_{\Omega} |D\varphi_E|$ gemessen. Eine ausführlichere Darstellung findet sich im Anhang A. \diamond

Bemerkung 2.2.6. Im Rahmen der Regularitätstheorie stellt man später wieder fest, dass für die so gefundenen Lösungen auch die klassischen Begriffe wie z.B. Flächeninhalt Sinn ergeben. Wir werden im zentralen Existenzsatz aber bereits direkt zu Beginn eine Approximation durchführen können, so dass wir mit glatten Mengen operieren und daher auch Begriffe wie z.B. Flächeninhalt benutzen können. \diamond

Erst im Jahre 1976 wurden von Almgren in [Al], im Rahmen einer weit allgemeineren Klasse von Problemen, Sätze hergeleitet, die als Anwendung unter anderem ein Existenzresultat für Lösungen des isoperimetrischen Problems beinhalten. Speziell betrachtet Almgren Mengen, die unter Lipschitz-Abbildungen ein bestimmtes Verhalten zeigen, was neben dem isoperimetrischen Problem auf eine Vielzahl geometrischer Variationsprobleme zutrifft. In dieser Arbeit wurde auch bereits in dem allgemeinen Kontext auf die Frage nach der Regularität eingegangen. Später konnten die Ergebnisse im Spezialfall des isoperimetrischen Problems für die innere Regularität von Gonzalez, Massari und Tamanini in [GMT] und für die Randregularität von Grüter in [Gr2] stark verbessert werden. Insgesamt ergibt sich dabei das folgende Ergebnis (vgl. [Ro2, Thm. 1]):

Satz 2.2.7. *Es sei Ω eine n -dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand) und Volumen $V(\Omega)$. Dann existiert für alle t zwischen 0 und $V(\Omega)$ eine kompakte Menge $E \subset \Omega$ mit Volumen t , deren Rand $\Sigma = \partial E$ unter allen Mengen dieses Volumens den Flächeninhalt minimiert.*

Der Rand Σ lässt sich zerlegen in eine abgeschlossene singuläre Menge mit Hausdorff-Dimension maximal $n - 8$ und einen regulären Teil, der eine glatte eingebettete Hyperfläche mit konstanter mittlerer Krümmung ist. Falls $\Sigma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ ist, muss Σ senkrecht auf den Rand auftreffen.

Bemerkung 2.2.8. Hierbei sind die beiden Fälle $t = 0$ und $t = V(\Omega)$ nicht enthalten, da in diesen Fällen das Problem trivialerweise bereits von $E = \emptyset$ bzw. $E = \Omega$ gelöst wird. Die Randfläche ist somit jeweils leer und hat Maß 0.

Aus formalen Gründen, um einige Bedingungen später einfacher formulieren zu können, werden wir aber auch diese Fälle jeweils einschließen und sowohl die leere Menge \emptyset als auch die ganze Menge Ω als isoperimetrische Mengen ansehen. \diamond

2.3 Zwei verwandte Probleme

2.3.1 Ein ähnliches isoperimetrisches Problem

Ein in der Formulierung sehr ähnliches Problem besteht darin, nicht $\int_{\Omega} |D\varphi_H|$ sondern $\int_{\overline{\Omega}} |D\varphi_H|$ zu minimieren. Für eine exakte Definition vergleiche man wiederum den Anhang A. Geometrisch bedeutet dies – zumindest für glatte Mengen – dass der komplette Flächeninhalt des Randes der Menge H vom Funktional gemessen wird, während in der Formulierung, die uns in dieser Arbeit interessiert, der Flächenanteil im Rand der Menge Ω keine Berücksichtigung findet. Dieses andere Funktional werden wir hier nicht weiter beachten, denn zum einen wird der physikalische Hintergrund von Seifenblasen in realen Behältern genau durch unsere Formulierung modelliert. Zum anderen sind wir später insbesondere an Mengen Ω interessiert, die sehr große Kugeln enthalten, so dass die Minimierung von $\int_{\overline{\Omega}} |D\varphi_H|$ trivial wird, da dann die Lösung automatisch eine Kugel ist. Dieses Problem ist also gerade dann interessant, wenn die Geometrie des Gebietes keine Kugeln des entsprechenden Volumens zulässt, zum Beispiel ein Einheitswürfel, der nur Kugeln bis zum Durchmesser 1 enthält. Ein physikalisches Problem dazu, das durch dieses Funktional modelliert wird, wäre z.B. ein Luftballon, der in einem Würfel eingequetscht ist.

2.3.2 Der sitzende Tropfen

Nichtkompakte Mannigfaltigkeiten sowie unbeschränkte Mengen wurden bisher sehr wenig untersucht, und es gibt daher auch nur wenige spezielle Ergebnisse. In [Gi2] werden sehr allgemeine unbeschränkte Gebiete Ω behandelt,

allerdings mit einem zusätzlichen Gravitationsterm der gegen die Richtung der x_n -Achse wirkt, das heißt: minimiert wird in dieser Arbeit nicht allein der Perimeter $\int_{\Omega} |D\varphi_E|$, sondern das Funktional

$$\mathcal{F}_g(E) := \int_{\Omega} |D\varphi_E| + g \int_{\Omega} x_n \varphi_E d\mathcal{L}^n + \int_{\partial\Omega} \cos \delta \varphi_E d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Der Randterm enthält eine weitere physikalische Größe, den Kontaktwinkel δ . Dieser kann zwar noch als rechter Winkel angenommen werden, so dass der dritte Term verschwindet, aber die Bedingung $g > 0$ ist wesentlich, wie in der Arbeit auch explizit bemerkt wird. Mit dem Gravitationsterm kann die Existenz eines Minimierers bereits unter sehr einfachen Voraussetzungen gezeigt werden. Es genügt, dass

$$\Omega = \text{epigraph } \omega$$

ist mit einer reinen Unbeschränktheitsbedingung

$$\omega(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

an die Funktion ω .

Insbesondere werden wir im nächsten Kapitel an einem Beispiel sehen, dass dieses Resultat im allgemeinen Kontext ohne Gravitationsterm falsch wird.

2.4 Der euklidische Fall

Wir werden nun zunächst einige konkrete Beispiele für isoperimetrische Mengen genauer anschauen. Eine sehr gute Übersicht über den aktuellen Stand des isoperimetrischen Problems mit vielen Beispielen gibt [Ro2].

Alle Beispiele in diesem Abschnitt sind gegeben durch Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit echt positivem Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n(\Omega)$. Die Begriffe Volumen und Fläche sind also durch \mathcal{L}^n und \mathcal{H}^{n-1} gegeben.

2.4.1 Der ganze n -dimensionale Raum

Wie in der Ebene und im Raum sind auch allgemein im \mathbb{R}^n die Lösungen des isoperimetrischen Problems durch n -dimensionale Kugeln gegeben.

Ein sehr einfacher Beweis benutzt eine Symmetrisierungsmethode von Hsiang (dargestellt in [Hs] bzw. [Ro2]), dabei wird im wesentlichen gezeigt, dass in jeder Richtung eine Ebene existiert, bezüglich der die Lösung symmetrisch ist. Daraus folgt sogleich, dass die Lösung eine Kugel ist.

2.4.2 Der Halbraum

Im Fall des Halbraums $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$ sind die Lösungen durch Halbkugeln gegeben, die auf dem Rand aufsitzen. Ein möglicher Beweis benutzt wiederum die Symmetrisierungsmethode von Hsiang.

Bemerkung 2.4.1. In diesem und auch im vorherigen Beispiel folgt die Existenz der Lösung *nicht* aus dem Satz von Almgren in der obigen Version von Satz 2.2.7, da keine Kompaktheit vorliegt. Die Existenz kann man in diesen Fällen zum Beispiel beweisen, indem man jeweils eine isoperimetrische Ungleichung beweist. Da die Kugel beziehungsweise Halbkugel diese mit Gleichheit erfüllt, stellt sie eine isoperimetrische Menge dar. Nachdem damit die Existenz gesichert ist, kann aus dem oben erwähnten Symmetrisierungsverfahren die Eindeutigkeit gefolgert werden. \diamond

2.4.3 Die „Platte“

Eine natürliche Verallgemeinerung des Halbraums ist eine „Platte“ zwischen zwei parallelen Ebenen, also ohne Einschränkung $M := \mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$. Bei dieser Problemstellung existieren für alle Dimensionen n und alle Volumina V Lösungen, wiederum mit Hilfe der Symmetrisierungsmethode von Hsiang. Für $n \leq 8$ ist die Lösung in Abhängigkeit vom Volumen V entweder eine Halbkugel oder ein Zylinder. Für $n \geq 10$ treten bei gewissen Volumenwerten auch Unduloide, also Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung ungleich Null, als Lösung auf. Im Fall $n = 9$ ist noch nicht bekannt, ob sich die Lösungen wie im Fall $n \leq 8$ oder wie im Fall $n \geq 10$ verhalten.

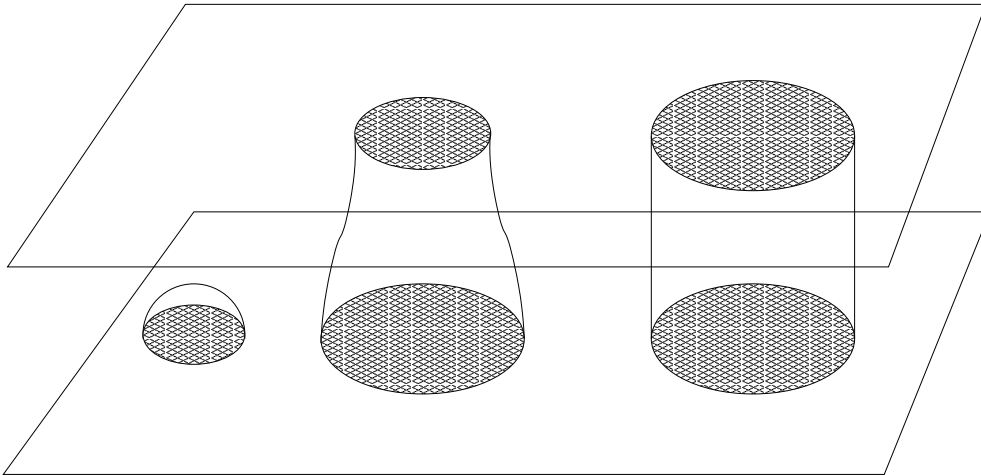


Abbildung 2.1: Eine Halbkugel, ein Unduloid und ein Zylinder.

2.4.4 Der Quader

Es sei nun Ω ein Quader $]0, a_1[\times \cdots \times]0, a_n[$ mit den Kantenlängen a_1 bis a_n . Hier greift die direkte Methode der Variationsrechnung wie wir in Bem. 2.2.2 sahen, so dass zu jedem Volumen V zwischen 0 und $a_1 a_2 \cdots a_n$ eine entsprechende isoperimetrische Menge existiert. Allerdings ist die konkrete Gestalt nicht bekannt.

Man findet sehr leicht Kandidaten für die isoperimetrischen Mengen: den Schnitt einer Kugel um eine Ecke des Quaders mit dem Quader selbst; ein Zylinder um eine Quaderkante, der ebenfalls mit dem Quader geschnitten wird; ein Halbraum der mit dem Quader geschnitten wird. Man kann sich direkt überzeugen, dass in Abhängigkeit von den konkreten Werten der eine oder andere Kandidat jeweils wegfällt. Aber es gibt noch weitere Kandidaten, die als Graphen über den Seitenflächen gegeben sein müssen und diese können nicht ausgeschlossen werden. In der Arbeit [Ri] beweist Ritoré im Fall $n = 3$, dass die Lösung zu einem der Typen aus Abbildung 2.2 gehört. Selbst im Falle eines dreidimensionalen Einheitswürfels, das heißt $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, ist die konkrete Gestalt noch nicht für alle Volumina bekannt.

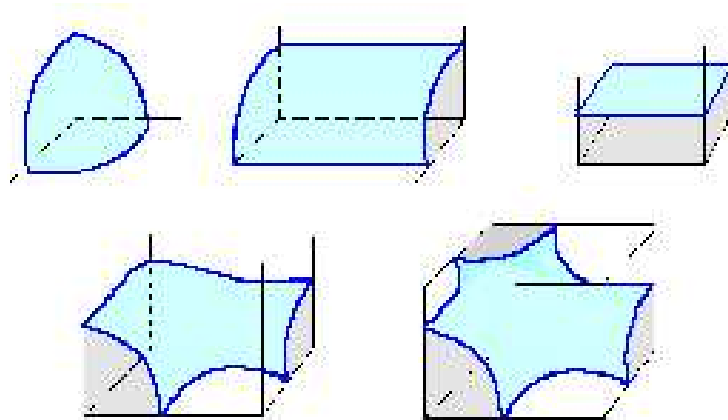


Abbildung 2.2: Kandidaten für isoperimetrische Mengen im Quader

2.4.5 Die Kugel

Im Fall der Kugel ist das isoperimetrische Problem vollständig gelöst (siehe [BS] oder [Ro2]). Die Lösungen sind in dem Fall die Halbkugel für das halbe Volumen und das von einer senkrecht auftreffenden Kugelkappe begrenzte Gebiet sonst.

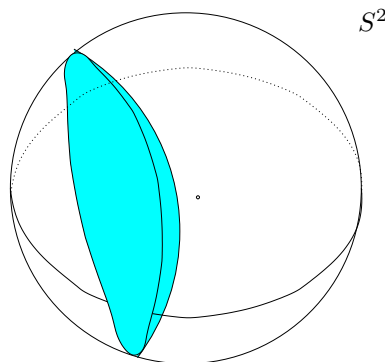


Abbildung 2.3: Die Kugel mit einem von einer Kugelkappe begrenzten isoperimetrischen Gebiet.

Hier muß man bereits im Fall $n = 3$ weitere Kandidaten ausschließen, die zum Beispiel topologisch vom Typ des Kreisrings sind. Danach folgt die Aussage

relativ leicht durch zunächst ein Symmetrisierungsargument und anschließenden Vergleich mit einer geeigneten Kugel.

2.4.6 Der Kegel

Die ersten Resultate zu isoperimetrischen Gebieten in unbeschränkten und gekrümmten Mengen wurden 1990 von Lions und Pacella für konvexe Kegel in [LP] und 2004 von Ritoré und Rosales für beliebige Kegel in [RR3] veröffentlicht:

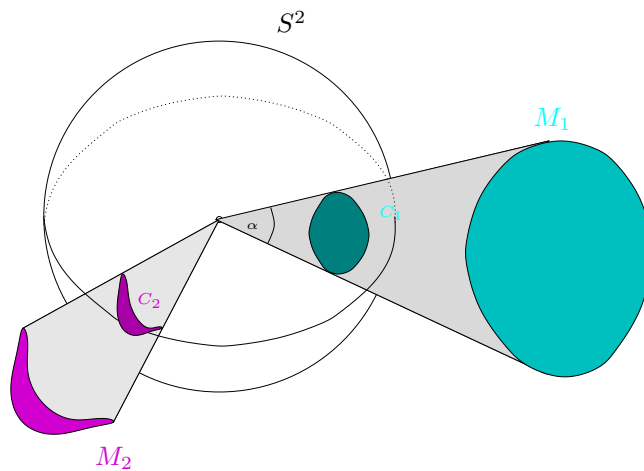


Abbildung 2.4: Ein konvexer Kegel M_1 mit Öffnungswinkel α und ein allgemeiner Kegel M_2 .

Satz 2.4.2. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel über einer glatten und offenen Menge $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$. Dann existieren entweder isoperimetrische Gebiete zu jedem Volumen V oder es existieren zu keinem Volumen V isoperimetrische Gebiete.*

Eine konkrete Anwendung über Mengen, in denen isoperimetrische Gebiete existieren, ist:

Satz 2.4.3. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel über einer glatten und offenen Menge $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ mit $\mathcal{H}^{n-1}(C) < \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})/2$. Dann existiert für alle $V > 0$ ein isoperimetrisches Gebiet in M .*

Im Fall von Kegeln M kann man Mengen skalieren. Die Abbildung

$$\begin{aligned} S_\lambda : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

bildet eine Menge $A \subset M$ wieder auf eine Menge $S_\lambda A \subset M$ ab mit Volumen

$$\mathcal{L}^n(S_\lambda A) = \lambda^n \mathcal{L}^n(A)$$

und Perimeter in M

$$\int_M |D\varphi_{S_\lambda A}| = \lambda^{n-1} \int_M |D\varphi_A|.$$

Damit kann das *isoperimetrische Profil*

$$I_M(V) := \inf \left\{ \int_M |D\varphi_E| : E \subset M, \mathcal{L}^n(E) = V \right\}$$

des Kegels M bis auf einen Faktor explizit bestimmt und mit dem des Halbraums verglichen werden.

2.5 Der nicht-euklidische Fall

Auch im Folgenden betrachten wir eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, allerdings besitzt diese nicht mehr ein positives Lebesgue-Maß \mathcal{L}^n , sondern ist als niederdimensionale Mannigfaltigkeit gegeben. Die Begriffe Volumen und Fläche stehen hier für die entsprechenden Maße auf der Mannigfaltigkeit.

Das erste Ergebnis für isoperimetrische Gebiete in gekrümmten unbeschränkten Mannigfaltigkeiten wurde 1996 von Benjamini und Cao erzielt (siehe [MHH]):

Satz 2.5.1. *Auf dem Paraboloid*

$$\Omega := \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

hat unter allen Gebieten vorgegebenen Flächeninhalts das von einem rotationssymmetrischen Kreis berandete den geringsten Umfang.

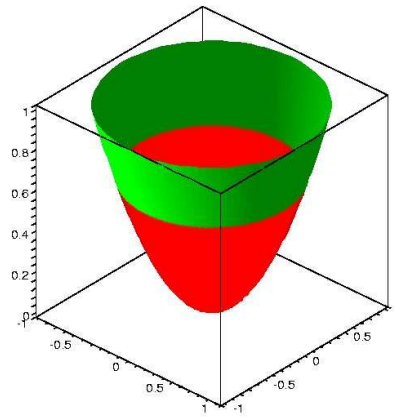


Abbildung 2.5: Das Paraboloid mit einem isoperimetrischen Gebiet

Der Beweis benutzt eine Verallgemeinerung der Bol-Fiala Ungleichung

$$L^2 \geq 4\pi A - K_0 A^2.$$

Hierbei ist L die Länge der Kurve und A der umrandete Flächeninhalt; zudem liegt die Kurve in einer Fläche S mit Gaußscher Krümmung $K \leq K_0$. Mit Hilfe der Formel von Gauß-Bonnet wird diese Ungleichung verallgemeinert zu

$$L^2 \geq 4\pi(\chi - c + 1) - 2 \int_0^A G(t) dt,$$

wobei nun c die Anzahl der Komponenten und χ die Euler-Charakteristik des umrandeten Gebiets ist. Die Funktion $G(t)$ ist das Supremum der Totalkrümmung über allen Gebieten mit Flächeninhalt t . Der obige Satz lässt sich dann auf die allgemeinere Situation einer vollständigen, rotationssymmetrischen Fläche mit monoton fallender Gaußscher Krümmung übertragen. Eine Übertragung des Ergebnisses auf höhere Dimensionen scheitert bereits am Fehlen sowohl einer entsprechenden Ungleichung als auch einem Analogon zum Satz von Gauß-Bonnet.

Bemerkung 2.5.2. Dieses Beispiel stellt in gewisser Weise den roten Faden für die Fragestellung der Arbeit dar. Denn das zentrale Ziel besteht darin die Existenz isoperimetrischer Gebiete im vollen Paraboloid

$$\{(x, y, z) : z > x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

zu zeigen. Wichtig ist es zu beachten, dass wir für das volle Paraboloid wieder im euklidischen Fall sind. \diamond

Kapitel 3

Beispiele und Heuristiken

In diesem Kapitel werden wir an drei einfachen Beispielen die besondere Problematik unbeschränkter Mengen erkennen. Zunächst werden wir sehen, dass sich unsere Situation fundamental vom „Gravitationsfall“ aus [Gi2] unterscheidet, indem wir eine Menge angeben, die viele „Ausstülpungen“ besitzt, welche die Existenz von Lösungen verhindern. In einem zweiten Beispiel werden wir erkennen, dass auch ein „immer flacherer“ Rand, der also keine solchen „Ausstülpungen“ wie im ersten Beispiel zulässt, keine Garantie für die Existenz isoperimetrischer Gebiete bietet. In einem dritten und letzten Beispiel sehen wir schließlich, dass alleine Bedingungen an den Rand nicht ausreichen können, indem wir einen Blick auf die Parabel werfen und versuchen isoperimetrische Gebiete im Äußern zu finden. Für dieses Beispiel ist es natürlich wichtig erneut darauf hinzuweisen, dass Ziel dieser Arbeit die Existenz isoperimetrischer Gebiete im Innern des Paraboloids ist.

3.1 Epigraphen

In der Arbeit [Gi2] wurde explizit auf die Notwendigkeit des Gravitationsterms in den dortigen Ergebnissen hingewiesen (vgl. Abschnitt 2.3.2). Es stellt sich daher die Frage, ob es überhaupt für die Existenz einer Lösung ausreichen kann, wenn wir eine Menge

$$\Omega = \text{epigraph } \omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \omega(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

allein mit der Zusatzannahme

$$\omega(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \tag{3.1}$$

betrachten, was im dortigen Fall bereits die Existenz von Minimierern impliziert. In unserem Fall können wir direkt ein Gegenbeispiel konstruieren, dazu betrachten wir die Funktion

$$\omega(x) := 2|x| + |x| \sin(x^2)$$

auf der reellen Achse.

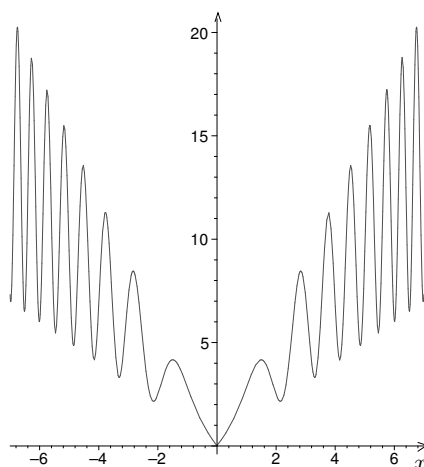


Abbildung 3.1: Der Graph von ω .

Die Idee bei der Entwicklung des Gegenbeispiels war es, eine Menge mit vielen Vertiefungen zu finden, so dass ein konstantes Volumen (hier: Fläche) durch immer kleiner werdenden Flächeninhalt (hier: Randlänge) abgeschlossen werden kann. Um dieses einzusehen, bemerken wir, dass der Graph im ersten Quadranten die Gerade mit der Steigung 2 unendlich oft schneidet, und zwar für $x_k = \sqrt{k\pi}$ ($k \in \mathbb{N}$) im Punkt $P_k(x_k, 2x_k)$. Die Verbindungslinie zwischen P_k und P_{k+1} ist für ungerades k ganz in Ω enthalten und hat Länge

$$d(P_k, P_{k+1}) = \sqrt{5} \left(\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Die Fläche zwischen der Verbindungslinie und dem Graphen ist

$$\begin{aligned}
 A_k &= - \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x \sin(x^2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \cos(x^2) \right]_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Somit können wir zum Flächeninhalt 1 Mengen mit dieser Fläche und beliebig kleiner Randlänge finden. Durch mehrere entsprechende Mengen und andere geeignet gewählte Verbindungslinien gilt dies natürlich auch für jeden anderen Flächeninhalt. Damit ist

$$\inf_{\substack{H \subset \Omega \\ \mathcal{L}^n(H) = V}} \int_{\Omega} |D\varphi_H| = 0$$

für jedes Volumen V , und es kann außer der leeren Menge keine nichttrivialen isoperimetrischen Gebiete geben.

Es genügt also nicht Epigraphen zu betrachten, die im Unendlichen gegen Unendlich konvergieren. Wenn die Menge immer längere „Ausstülpungen“ hat, in denen ein festes Volumen mit immer kleinerem Flächeninhalt untergebracht werden kann, so existiert keine Lösung.

Bemerkung 3.1.1. Der wesentliche Unterschied zur Arbeit von Giusti liegt darin, dass bereits aus der Bedingung (3.1) und dem mittleren Term

$$g \int_{\Omega} x_n \varphi_E d\mathcal{L}^n$$

im dort untersuchten Funktional (vgl. 2.3.2) eine a-priori-Abschätzung an die Höhe, d.h. x_n , folgt und damit Minimalfolgen automatisch gleichmäßig beschränkt sind. \diamond

3.2 Mengen mit flachem Rand

Um solche Ausstülpungen wie an der Menge im obigen Beispiel zu vermeiden, betrachten wir nun eine Menge, deren Rand sogar asymptotisch flach ist. Dabei bedeutet asymptotisch flach, dass die Metrik der Fläche schnell gegen die euklidische Metrik konvergiert, genauer:

Definition 3.2.1. [SY, 217] *Eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit (M, g) heißt asymptotisch flach von Ordnung τ , wenn $M = M_0 \cup M_\infty$ ist, wobei M_0 kompakt ist und M_∞ diffeomorph ist zu $\mathbb{R}^n \setminus B_R$ ($R > 0$) und für das durch den Diffeomorphismus gegebene Koordinatensystem $\{y^i\}$ gilt*

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(|y|^{-\tau}), \partial_k g_{ij} = \delta_{ij} + O(|y|^{-\tau-1}), \partial_k \partial_l g_{ij} = \delta_{ij} + O(|y|^{-\tau-2}).$$

Bemerkung 3.2.2. Wir werden im Folgenden einen anderen Flachheitsbegriff, den der geometrischen asymptotischen Flachheit, definieren, die hier gegebene Definition asymptotischer Flachheit werden wir nicht weiter benötigen. \diamond

Es sei

$$\Omega := \left\{ (x, y) : x > 1, |y| < \frac{1}{x} \right\} \cup B_{\sqrt{2}}(0) \subset \mathbb{R}^2.$$

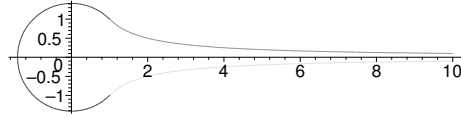


Abbildung 3.2: Die Menge Ω mit asymptotisch flachen Rand

In dieser Menge Ω betrachten wir nun das Gebiet

$$E_{ab} := \Omega \cap [a, b] \times \mathbb{R}.$$

Die Fläche von E_{ab} beträgt für $1 < a < b$

$$\mathcal{L}^2(E_{ab}) = 2(\ln(b) - \ln(a)),$$

strebt also gegen unendlich bei jedem festen Wert a , wenn b beliebig groß wird. Die Länge der Randkurve in Ω beträgt

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_{ab}}| = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} < \frac{4}{a},$$

wird also beliebig klein für genügend große a .

Somit hat auch diese Menge keine isoperimetrischen Gebiete.

Bemerkung 3.2.3. Der Rand der hier betrachteten Menge Ω ist als glatte eindimensionale Menge natürlich asymptotisch flach, jedoch ist dieser Begriff erst für Dimension $n \geq 2$ von wirklicher Aussagekraft.

Das Beispiel lässt sich jedoch in einfacher Weise auf höhere Dimension verallgemeinern: Zum Beispiel können wir $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ betrachten. Bei dieser Menge untersuchen wir aus der Menge Ω herausführende Zylinder in Richtung y -Achse um $P(x, 0, 0)$ mit Radius r . Eine gleichzeitige Skalierung von dem Wert x um den Faktor 2 und dem Radius r um den Faktor $\sqrt{2}$ wird das Volumen in etwa konstant lassen (Grundfläche verdoppelt sich, die „mittlere“ Höhe halbiert sich) während sich die Oberfläche des Mantels um einen Faktor $\sqrt{2}$ verringert (Umfang wächst nur linear, also mit $\sqrt{2}$, die „mittlere“ Höhe halbiert sich). \diamond

Eine reine Flachheitsbedingung an den Rand genügt also auch nicht. Wenn Randpunkte, die im Rand weit auseinander liegen, sich in der Menge beliebig nahekommen können, kann dazwischen auch Volumen mit immer geringerem Aufwand an Flächeninhalt eingesperrt werden.

3.3 Mengen mit flachem Rand und Abstandsbedingung

Betrachten wir als letztes Beispiel

$$\Omega := \{(x, y) : y < x^2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Diese Menge hat wiederum einen asymptotisch flachen Rand. Zusätzlich sind aber auch zwei Randpunkte P_1, P_2 , die im \mathbb{R}^2 nahe beieinander liegen, auch im Rand nahe beieinander. Dazu beachten wir, dass die Entfernung im Rand gegeben ist durch die Länge der Randkurve zwischen $P_1(x_1, x_1^2)$ und $P_2(x_2, x_2^2)$ (o.E. sei $x_1 < x_2$), also

$$\begin{aligned} d_{\partial\Omega}(P_1, P_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + 4t^2} dt \leq \int_{x_1}^{x_2} 1 + 2t dt \\ &= (x_2 - x_1) + (x_2^2 - x_1^2) \leq d_{\mathbb{R}^2}(P_1, P_2) + d_{\mathbb{R}^2}^2(P_1, P_2). \end{aligned}$$

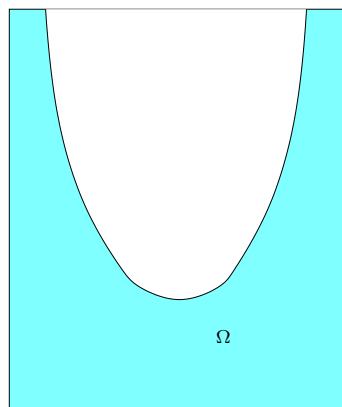


Abbildung 3.3: Die Menge Ω als Subgraph der Normalparabel.

Nehmen wir an, dass $E \subset \Omega$ ein isoperimetrisches Gebiet zum Volumen $V > 0$ sei. Nach den Regularitätsergebnissen von [GMT] und [Gr2], vgl. Satz B.2.3, ist die Randkurve dann regulär, hat konstante Krümmung und trifft senkrecht am Rand auf. Somit ist sie als ebene Kurve eine Gerade oder ein

Kreisbogen. Da sie zusammen mit der Parabel ein endliches Volumen einschließt, muss die Randkurve folglich aus einem oder mehreren Kreisbögen bestehen.

Betrachten wir nun einen einzelnen solchen Kreisbogen und das von ihm und der Parabel umschlossene Gebiet E' . Der Kreisbogen treffe in den beiden Punkten P_1 und P_2 auf. Da die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ strikt konvex ist, liegt die Verbindungsstrecke außerhalb von Ω . Durch Hinzunahme des Gebietes zwischen dieser Verbindungsstrecke und der Parabel wird der Flächeninhalt also echt größer. Zugleich hat die Menge bezüglich des Halbraumes, in dem sie liegt (die Gerade durch die Punkte P_1 und P_2 zerlegt den \mathbb{R}^2 in zwei entsprechende Halbräume), aber den gleichen Perimeter, nämlich die Länge des Kreisbogens. Damit muss die Menge E' einen echt kleineren Flächeninhalt haben als ein Halbkreis mit gleicher Randlänge des Kreisbogens. Dementsprechend hat auch das gesamte Gebiet E einen echt kleineren Flächeninhalt als ein einziger Halbkreis mit $\int_{\Omega} |D\varphi|$ als Länge des Kreisbogens. Dem Halbkreis kann man sich aber beliebig gut annähern, wenn man Punkte P_1 und P_2 sehr weit außen betrachtet. Die Menge E kann also kein isoperimetrisches Gebiet sein.

Auch bei einer Flachheitsbedingung zusammen mit einer Bedingung an den Rand muss es also noch keine isoperimetrischen Gebiete geben. In diesem Fall hier hat die Krümmung nach innen es verhindert, dass „bessere“ Mengen als der Halbkreis existieren.

Kapitel 4

Formulierung und Beweis des Existenzsatzes

Nachdem wir in dem vorherigen Kapitel Beispiele gesehen haben, in denen keine isoperimetrischen Gebiete existieren können, werden wir zunächst zwei geometrische Bedingungen formulieren, die gerade solche Beispiele wie zuvor ausschließen. Dies wird zum einen eine Flachheitsbedingung sein, die auf eine Art allgemeiner als der Begriff der asymptotischen Flachheit ist, andererseits aber dennoch stärker, indem weit entfernte Randpunkte nicht nahe zusammenkommen können. Der zweite Begriff ist die Volumenvergleichsbedingung, die u.a. eine Aussage darüber macht, dass die Menge überhaupt Gebiete enthalten muss, die besser als Halbkugeln sind. Für das Paraboloid werden wir uns direkt überzeugen, dass beide Bedingungen von dieser Menge erfüllt werden. Im anschließenden Beweis werden wir zeigen, dass diese beiden Bedingungen mit sehr geringen Regularitätsbedingungen an den Rand der Menge bereits genügen, um die Existenz isoperimetrischer Gebiete zu sichern.

4.1 Definitionen und Vorbemerkungen

Definition 4.1.1. *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt geometrisch asymptotisch flach (bis zum Radius R), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K > 0$ existiert, so dass gilt:*

Zu jedem $y \in \partial\Omega$ mit $|y| > K$ gibt es ein $A \in SO(n)$ und eine stetige

Funktion $g : B_R^{n-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$, $|g| < \varepsilon$, so dass

$$\partial\Omega \cap B_R(y) \subset y + A \text{ graph } g.$$

Der Rand einer Menge, die geometrisch asymptotisch flach ist, lässt sich somit lokal bis zum Abstand R von einem Punkt aus als Graph mit geringer Höhe über einer geeigneten Ebene schreiben. Die Existenz einer Tangentialebene ist nicht gefordert!

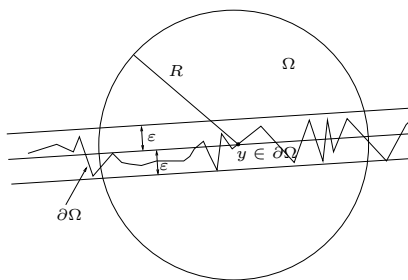


Abbildung 4.1: Ein Randpunkt mit dem verschobenen und rotierten Graphen.

Bemerkung 4.1.2. Die Bedingung der geometrischen asymptotischen Flachheit impliziert natürlich keine asymptotische Flachheit des Randes, da keinerlei Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird. Die Umkehrung gilt aber auch nicht ohne weitere geometrische Voraussetzung. Zum Beispiel ist die Menge $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$ offen, und der Rand besteht aus zwei Geraden, also ist sie insbesondere asymptotisch flach. Die geometrische asymptotische Flachheit gilt aber nur bis zum Radius $R = 1$, da für größere Radien $\partial\Omega \cap B_R(y)$ um einen beliebigen Punkt $y \in \partial\Omega$ aus mehreren Teilen besteht und sich nicht mehr als Graph schreiben lässt.

Ebenso ist der Rand der Menge $\Omega' := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \frac{1}{|x|+1} \right\}$ bis auf die Punkte $(0, 1)$ und $(0, -1)$ glatt und asymptotisch flach. Die Menge ist aber zu keinem Radius R geometrisch asymptotisch flach, da der Rand aus zwei sich im Unendlichen annähernden Linien besteht.

Durch Hinzunahme einer weiteren Bedingung wie zum Beispiel einer geeigneten Bogen-Sehnen-Bedingung kann aus der asymptotischen Flachheit die geometrische asymptotische Flachheit gefolgert werden. Aus der Bogen-Sehnen-Bedingung folgt zunächst, dass $\partial\Omega \cap B_R(y)$ aus nur einem Teil besteht, und

danach kann der Rand als Graph über der Tangentialfläche geschrieben werden. Aus der asymptotischen Flachheit folgt nun die Kleinheitsbedingung an die Höhe der Funktion. \diamond

Lemma 4.1.3. *Das Paraboloid*

$$\Omega = \text{epigraph } \omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > \omega(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2\}$$

ist geometrisch asymptotisch flach.

Beweis. Es seien R und $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Rotationssymmetrie können wir den Randpunkt y ohne Einschränkung als von der Form $(y_1, 0, y_1^2)$ mit $y_1 \geq 0$ annehmen. Die Tangentialebene im Punkt y ist dann in Punktnormalenform gegeben durch

$$e : \frac{(-2y_1, 0, 1)}{\sqrt{1+4y_1^2}} \cdot (p - (y_1, 0, y_1^2)) = 0.$$

Der Punkt $P(y_1 + h_1, h_2, (y_1 + h_1)^2 + h_2^2)$, aus dem Rand von Ω , hat also von der Tangentialebene den Abstand $\frac{h_2^2 + h_1^2}{\sqrt{1+4y_1^2}}$, und für Punkte aus $\partial\Omega \cap B_R(y)$

ist der Abstand zur Tangentialebene damit abgeschätzt durch $\frac{R^2}{\sqrt{1+4y_1^2}}$. Nun

wählen wir zunächst einmal K so, dass $\frac{R^2}{\sqrt{1+4K^2}} < \varepsilon$ ist.

Über einem festen Punkt der Tangentialebene können in Normalenrichtung allerdings zwei Punkte aus dem Rand des Paraboloids liegen. Aufgrund unserer speziellen Wahl von y hat maximal einer dieser beiden Punkte eine positive x_1 -Koordinate. Daher fordern wir nun auch $K > R$, somit kann nur einer der beiden Punkte in $\partial\Omega \cap B_R(y)$ liegen und $\partial\Omega \cap B_R(y)$ lässt sich folglich injektiv auf die Tangentialebene projizieren. Damit setzen wir g als die Höhe des Punktes über der Tangentialebene fest und $A \in SO(3)$ ist dadurch bestimmt, dass sie den $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ auf die Tangentialebene abbildet.

Da R beliebig war, ist das Paraboloid geometrisch asymptotisch flach zu jedem Radius $R > 0$. \square

Definition 4.1.4. *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt eine Volumenvergleichsbedingung zum Volumen V_0 , wenn für alle $V \in (0, V_0]$ und alle isoperimetrischen Gebiete $E' \subset \Omega$ mit $\mathcal{L}^n(E') = V' < V$ eine Menge $E_V \subset \Omega$ existiert mit $\mathcal{L}^n(E_V) = V$ und*

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_V}| < \mathcal{H}^{n-1}(\partial E' \cap \Omega) + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{2(V-V')}),$$

wobei $B_{2(V-V')}$ eine Kugel mit Volumen $2(V - V')$ ist.

Bemerkung 4.1.5. Die Menge E_V , deren Existenz gefordert wird, darf dabei eine beliebige Caccioppoli-Menge sein, daher ist das sinnvolle Maß für den Rand innerhalb von Ω der Perimeter. Die Menge E' ist als festes isoperimetrisches Gebiet vorausgesetzt, nach Satz B.1.1 ist daher der Ausdruck $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E' \cap \Omega)$ wohldefiniert und sinnvoll. Der letzte Term schließlich ist eine reine Konstante, die nur von der Dimension n und der Volumendifferenz $V - V'$ abhängt. \diamond

Bemerkung 4.1.6. In dieser Definition kommen isoperimetrische Gebiete vor, insbesondere zählt hier auch die leere Menge dazu, da diese ein isoperimetrisches Gebiet zum Volumen 0 darstellt. Dieser, auch bereits an früherer Stelle erwähnte, Sonderfall muss dringend mitbeachtet werden, da in der Anwendung später keine Kontrolle nach unten des Volumens der aufzufüllenden Menge möglich ist. \diamond

Bemerkung 4.1.7. Hier und im Folgenden werden Kugeln sowohl in der Notation $B_r(0)$ als auch in der Notation B_V erscheinen. Das Erste bezeichnet eine Kugel um den Nullpunkt vom Radius r , mit der i.A. Mengen geschnitten werden, das Zweite eine beliebige Kugel des Volumens V , mit der keine andere Menge geschnitten wird, sondern deren Oberflächenmaß als Vergleich herangezogen wird.

Sofern die Dimension der Kugel nicht direkt aus dem Zusammenhang klar ist, wird diese ebenfalls als Index angegeben, wie z.B. bei $B_r^{n-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. \diamond

Die Volumenvergleichsbedingung zum Volumen V_0 bedeutet also, dass vorgegebene Mengen immer auf ein gewünschtes Volumen (maximal V_0) aufgefüllt werden können bzw. durch eine neue Menge komplett ersetzt werden können, wobei der Zugewinn an Randfläche gegenüber der alten Menge weniger ist, als bei der Hinzunahme einer Halbkugel mit dem entsprechenden Fehlvolumen.

Bemerkung 4.1.8 (Der Halbraum). Auf den ersten Blick kann man vielleicht erwarten, dass der Halbraum selbst eine Volumenvergleichsbedingung erfüllt. Da die isoperimetrischen Gebiete in diesem Fall vollständig bekannt sind (als Halbkugeln, vgl. 2.4.2) kann man sich in der Tat überzeugen, dass die Ungleichung für alle isoperimetrischen Mengen E' mit $\mathcal{L}^n(E') > 0$ erfüllt ist. Für den Fall der leeren Menge, also zum Volumen 0, haben wir aber die Gleichheit beider Seiten. Der Halbraum erfüllt somit *keine* Volumenvergleichsbedingung. \diamond

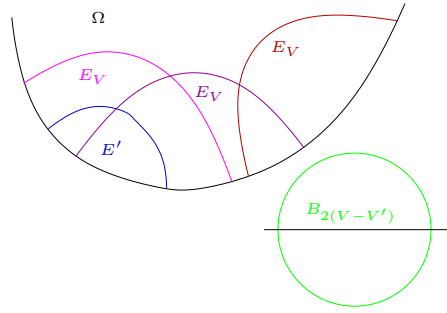


Abbildung 4.2: Die Menge E' und drei mögliche Mengen E_V sowie die Vergleichskugel.

Lemma 4.1.9. *Die Menge*

$$\Omega = \text{epigraph } \omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \omega(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

sei strikt konvex und, sofern eine isoperimetrische Menge in Ω existiert, sei diese beschränkt. Dann erfüllt Ω eine Volumenvergleichsbedingung für alle $V_0 > 0$.

Beweis. Das Volumen $V < V_0$ und die isoperimetrische Menge $E_{V'}$ seien fixiert. Da nach Voraussetzung die Menge $E_{V'}$ beschränkt ist, gibt es somit ein $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ und ein $r > 0$ derart, dass mit $B := B_r^n(y, \omega(y))$ gilt

$$B \cap E_{V'} = \emptyset$$

und

$$\mathcal{L}^n(B \cap \Omega) = V - V'.$$

Aufgrund der strikten Konvexität von Ω ist der endliche Kegel K mit Spitze $(y, \omega(y))$ über $\partial B \cap \Omega$ echt in $B \cap \Omega$ enthalten und somit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B \cap \Omega) &= \mathcal{H}^{n-1}((\partial K \cap \partial B) \cap \Omega) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(\partial B) \frac{\mathcal{L}^n(K)}{\mathcal{L}^n(B)} \\ &< \mathcal{H}^{n-1}(\partial B) \frac{\mathcal{L}^n(B \cap \Omega)}{\mathcal{L}^n(B)} \\ &= \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B)}{\mathcal{L}^n(B)} \mathcal{L}^n(B \cap \Omega). \end{aligned}$$

Da $\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r^n)/\mathcal{L}^n(B_r^n)$ für Kugeln im \mathbb{R}^n eine monoton fallende Funktion des Radius und $B_{2(V-V')} \subset B$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{n-1}(\partial B \cap \Omega) &< \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{2(V-V')})}{\mathcal{L}^n(B_{2(V-V')})} \mathcal{L}^n(B \cap \Omega) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{2(V-V')})\end{aligned}$$

Mit $E := E_{V'} \cup B$ folgt also die Volumenvergleichsbedingung. □

Korollar 4.1.10. *Das Paraboloid erfüllt die Volumenvergleichsbedingung für alle $V_0 > 0$.*

Beweis. Da das Paraboloid strikt konvex ist, müssen wir aufgrund des Lemmas nur noch zeigen, dass isoperimetrische Mengen beschränkt sein müssen. Es sei also E eine gegebene isoperimetrische Menge. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Die Menge E ist die leere Menge, diese ist trivialerweise beschränkt.
2. Es sei nun E nichtleer, habe also insbesondere positives Volumen. Nach 5.1.1 erfüllt das Paraboloid somit eine isoperimetrische Ungleichung. Nach 5.3.1 impliziert diese isoperimetrische Ungleichung bereits die Beschränktheit aller isoperimetrischen Gebiete, also ist insbesondere auch die gegebene Menge E beschränkt. Wichtig ist hier hervorzuheben, dass sowohl in 5.1.1 als auch in 5.3.1 nur die Existenz einer einzigen isoperimetrischen Menge vorausgesetzt wird, noch nicht die allgemeine Lösbarkeit des isoperimetrischen Problems im Paraboloid!

Damit folgt die Aussage aus dem vorherigen Lemma. □

Bemerkung 4.1.11. Ein weiteres Beispiel für eine Menge ohne Volumenvergleichsbedingung ist das Äußere des Paraboloids. Hierbei ist wiederum wichtig zu bemerken, dass die leere Menge eine isoperimetrische Menge zum Volumen 0 ist. ◇

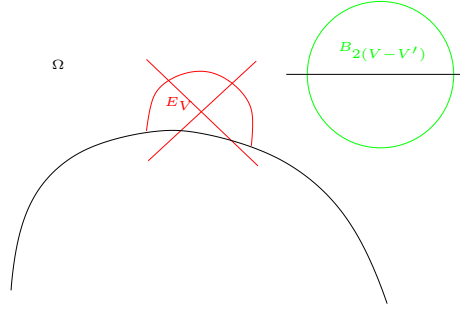


Abbildung 4.3: Eine Menge Ω , die bereits bzgl. $E' = \emptyset$ keine Volumenvergleichsbedingung erfüllt, vgl. 4.1.11.

Lemma 4.1.12. *Die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfülle die Volumenvergleichsbedingung bis zum Volumen $V_0 > 0$, und es sei $\tilde{V} \in (0, V_0)$. Für festes isoperimetrisches E' mit $\mathcal{L}^n(E') = V' < \tilde{V}$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für $V \in [\tilde{V}, V_0]$ und E_V sowie $B_{2(V-V')}$ wie in der Definition*

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_V}| < \mathcal{H}^{n-1}(\partial E' \cap \Omega) + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{2(V-V')}) - \varepsilon \quad (4.1)$$

gilt. Das heißt, die Bedingung wird auf kompakten Teilmengen von $(0, V_0]$ gleichmäßig erfüllt.

Beweis. Es sei $V \in [\tilde{V}, V_0]$ beliebig. Die Menge Ω erfüllt die Volumenvergleichsbedingung, also existiert eine Menge E_V mit $\mathcal{L}^n(E_V) = V$ und

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_V}| = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E' \cap \Omega) + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{2(V-V')}) - \varepsilon_V,$$

wobei $B_{2(V-V')}$ eine Kugel mit Volumen $2(V - V')$ ist und $\varepsilon_V > 0$.

Es sei nun $y \in \partial E_V \cap \Omega$. Wir definieren die Mengen

$$E_t := E_V \setminus B_{|t|}(y) \quad \text{für } t < 0$$

und

$$E_t := E_V \cup B_t(y) \quad \text{für } t > 0.$$

Für hinreichend kleines $t > 0$ ist immer noch $E_t \subset \Omega$, da $y \in \Omega$ und Ω offen ist. Dann ist $V(t) = \mathcal{L}^n(E_t)$ eine für $|t| < t_0$ streng monoton wachsende

(vgl. 2.1) und stetige Funktion in t mit $V(0) = V$. Für den Perimeter von E_t erhalten wir

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_t}| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_V}| + \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{|t|}(y)).$$

Für genügend kleine $|t| < t_1$ ist also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_t}| &< \int_{\Omega} |D\varphi_{E_V}| + \frac{\varepsilon_V}{4} \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(\partial E' \cap \Omega) + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{2(V-V')}) - \frac{3\varepsilon_V}{4} \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E' \cap \Omega) + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{2(V(t)-V')}) - \frac{\varepsilon_V}{2} \end{aligned}$$

Somit existiert also zu dem beliebigen V ein $\varepsilon = \varepsilon_V/2$ derart, dass in einer kleinen Umgebung von V die geforderte Ungleichung mit ε gilt. Nach der Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft existiert somit ein universelles ε wie behauptet. \square

4.2 Formulierung und Beweis des Theorems

Theorem 4.2.1. *Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei unbeschränkt, geometrisch asymptotisch flach, mit Lipschitz-Rand und erfülle die Volumenvergleichsbedingung bis zum Volumen V_0 . Dann ist das Partitionsproblem für jedes $V \in [0, V_0]$ lösbar, das heißt, es existiert jeweils eine isoperimetrische Teilmenge E_V mit Volumen V .*

Gliederung des Beweises:

Wir werden zunächst eine beliebige Minimalfolge E_k von Caccioppoli-Mengen betrachten. Durch ein Approximationsargument werden wir uns direkt auf den Fall einer Minimalfolge beschränkter und glatter Mengen zurückziehen können.

Danach werden wir den Beweis in 6 Schritten führen:

Zunächst werden wir sehen, dass eine Teilfolge der Minimalfolge bereits in geeigneten L^1 -Räumen gegen eine Menge E konvergiert bzw. lokal konvergiert.

Im zweiten Schritt beweisen wir, dass diese Menge E auf jeden Fall bereits eine isoperimetrische Menge ist.

Der wesentliche Punkt ist nun an dieser Stelle, dass in unbeschränkten Gebieten diese Menge E a priori vom Volumen her kleiner als die jeweiligen Mengen E_k sein kann, es ist i.A. keine Konvergenz in ganz $L^1(\Omega)$ gegeben! Die Schritte 3-6 sind daher darauf ausgerichtet zu zeigen, dass durch die beiden geometrischen Bedingungen an Ω die Menge E das volle Maß hat. Dies wird durch einen indirekten Beweis geschehen, also die Annahme, dass E nicht das gewünschte Volumen hat.

Dazu werden wir in Schritt 3 zeigen, dass, wenn Volumen verloren ginge, dies in einem gewissen Sinn gleichmäßig geschehen muss.

In Schritt 4 werden wir die einzelnen Glieder der Minimalfolge in gleichmäßig beschränkte Teile zerlegen. Dabei werden neue „Randflächen“ entstehen, deren Größe wir genau kontrollieren müssen.

Schritt 5 wird diese beschränkten Teile genauer daraufhin untersuchen, wie groß der jeweilige Beitrag sowohl zu Perimeter als auch zu Volumen ist. Dabei werden wir feststellen, dass dies für Teile, die weit außen liegen, gleichmäßig abschätzbar ist. An dieser Stelle wird die geometrische asymptotische Flachheit entscheidend eingehen.

Schritt 6 wird schließlich all diese Ergebnisse zusammensetzen. Wir werden eine einzelne Menge E_k der Minimalfolge betrachten beziehungsweise ihre Zerlegung in beschränkte Teile. Einige Teile davon, die weit außen liegen, werden gemäß der Volumenvergleichsbedingung durch einen anderen Teil ersetzt werden. Durch sowohl die Kontrolle über den Zuwachs in Schritt 4 als auch eine nach Schritt 3 gleichmäßige Verbesserung bei dieser Ersetzung werden wir insgesamt den Widerspruch erhalten.

Beweis. Wir fixieren ein $V \in (0, V_0]$, denn für $V = 0$ ist bereits die leere Menge eine Lösung des Partitionsproblems.

Zunächst stellen wir fest, dass aufgrund der Unbeschränktheit und der geometrischen asymptotischen Flachheit die Menge Ω Kugeln mit beliebigem Radius enthält. Also existiert auf jeden Fall eine Caccioppoli-Menge zum Volumen V . Für eine unbeschränkte Caccioppoli-Menge E zum Volumen V betrachten wir zunächst die Mengen $E_R := E \cap \Omega_R$. Es gilt $\mathcal{L}^n(E_R) \nearrow V$ bei $R \rightarrow \infty$. Für $\varepsilon > 0$ finden wir nach der Koflächenformel (vgl. Argumentation in Schritt 2) beliebig große Radien R mit $\int_{\Omega} |D\varphi_{E_R}| < \int_{\Omega} |D\varphi_E| + \varepsilon$. Wir wählen nun einen Radius so groß, dass die Oberfläche von $B_{V-\mathcal{L}^n(E_R)}$ ebenfalls durch ε abgeschätzt ist. Indem wir die Menge E_R durch eine entsprechende Kugel ergänzen (diese existiert, vgl. oben) erhalten wir eine Menge E'_R vom Volu-

men V und Perimeter maximal $\int_{\Omega} |D\varphi_E| + 2\varepsilon$. Da ε beliebig war, können wir in einer Minimalfolge die Caccioppoli-Mengen somit ohne Einschränkung als beschränkt annehmen.

Es sei nun E_k eine Minimalfolge von beschränkten Caccioppoli-Mengen, das heißt $E_k \subset \Omega$, $\mathcal{L}^n(E_k) = V$ und

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \inf_{\substack{H \subset \Omega \\ \mathcal{L}^n(H) = V}} \int_{\Omega} |D\varphi_H|.$$

Nach Satz A.2.2 lässt sich eine beschränkte Caccioppoli-Menge C durch eine beschränkte Folge C_j von C^∞ -Mengen approximieren und es gilt

$$\int_{\Omega} |\varphi_{C_j} - \varphi_C| d\mathcal{L}^n \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \quad \int_{\Omega} |D\varphi_{C_j}| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_C|.$$

Von der Menge E_k werden wir nun zunächst eine kleine Kugel $B_\rho(x)$ um einen Punkt $x \in E_k$ entfernen, so dass für die entstehende Menge E'_k gilt:

$$V - \frac{1}{k} \leq \mathcal{L}^n(E'_k) < V, \quad \int_{\Omega} |D\varphi_{E'_k}| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + \frac{1}{k}.$$

Zu E'_k existiert daher eine glatte Menge E''_k mit

$$V - \frac{2}{k} \leq \mathcal{L}^n(E''_k) < V, \quad \int_{\Omega} |D\varphi_{E''_k}| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + \frac{2}{k}.$$

Da diese Menge E''_k beschränkt ist, können wir das Volumen durch Hinzunahme einer kleinen disjunkten Kugel (die existiert, s.o.) auffüllen und erhalten eine glatte Menge E'''_k mit

$$\mathcal{L}^n(E'''_k) = V \text{ und } \int_{\Omega} |D\varphi_{E'''_k}| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + \frac{2}{k} + \alpha(k) \text{ mit } \alpha(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Daher können wir bereits ohne Einschränkung unsere Minimalfolge E_k als Folge beschränkter und glatter Mengen voraussetzen, d.h. der Rand $\partial E_k \cap \Omega$ ist glatt.

1. Der Grenzwert der Minimalfolge:

Im kompakten Fall kann man direkt aufgrund des Kompaktheitssatzes für BV -Funktionen zum Grenzwert übergehen und erhält zusammen mit der Unterhalbstetigkeit des Perimeters, dass die Grenzmenge ein Minimierer ist. Dieses Verfahren werden wir nun auf kompakten Teilmengen von Ω ausnützen.

Wir setzen $\Omega_r := \Omega \cap B_r(0)$. Nach dem Kompaktheitssatz (siehe [EG, 5.2.3] oder [Gi1, 1.19]) gibt es auf Ω_r eine in $L^1(\Omega_r)$ konvergente Teilfolge der E_k . Mit Hilfe einer Folge von Radien $r \rightarrow \infty$ und einer Diagonalfolgenauswahl erhalten wir eine, wiederum mit E_k bezeichnete, Teilfolge und eine Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so dass

$$\varphi_{E_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f \quad (4.2)$$

in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ konvergiert sowie in $L^1(\Omega_r)$ für jedes r . Nach einer erneuten Teilfolgenauswahl haben wir auch eine punktweise Konvergenz fast überall, also ist $f = \varphi_E$ für ein geeignetes $E \subset \Omega$. Da die L^1 -Norm der φ_{E_k} gleichmäßig beschränkt ist, gilt nach dem Lemma von Fatou [EG, 1.3]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E) &= \int_{\Omega} \varphi_E d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} f d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi_{E_k} d\mathcal{L}^n \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_{E_k} d\mathcal{L}^n = V \end{aligned} \quad (4.3)$$

und aufgrund der Unterhalbstetigkeit des Perimeters (siehe [Gi1, 1.9] bzw. A.1.6)

$$\int_{\Omega} |D\varphi_E| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}|. \quad (4.4)$$

2. Die Menge E ist isoperimetrisch zu ihrem eigenen Volumen:

Dieser Schritt benutzt nun eine Idee, die bereits in [RR3, 2.1] angedeutet wird.

Mit der Koflächenformel erhalten wir

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \partial B_r(0)) dr \leq \mathcal{L}^n(E_k) = V. \quad (4.5)$$

Für $r_2 - r_1 \geq k$ existiert nun ein r_k zwischen r_1 und r_2 , so dass der Integrand an dieser Stelle klein wird, das heißt mit

$$\mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \partial B_{r_k}(0)) \leq \frac{V}{r_2 - r_1} \leq \frac{V}{k}. \quad (4.6)$$

Wir definieren nun induktiv eine Teilfolge E_{k_j} und eine Folge von Radien r_{k_j} folgendermaßen:

Zuerst wählen wir als Startwerte ($j = 1$) unseren Index k_1 und die zugehörige Menge E_{k_1} so, dass nach (4.2)

$$\int_{\Omega_3} |\varphi_{E_{k_1}} - \varphi_E| d\mathcal{L}^n \leq \frac{1}{1}$$

ist. Wir definieren den Radius $r_1 \in (0, 1)$ so, dass mit (4.6)

$$\mathcal{H}^{n-1}(E_{k_1} \cap \partial B_{r_1}(0)) \leq \frac{V}{1}$$

gilt.

Im induktiven Schritt seien nun E_{k_j} und r_j bereits festgelegt, wir wählen nun ein k_{j+1} so groß, dass

$$\int_{\Omega_{r_j+2j}} |\varphi_{E_{k_{j+1}}} - \varphi_E| d\mathcal{L}^n \leq \frac{1}{j}.$$

Dies können wir so wählen, da für jedes r nach (4.2) $\varphi_{E_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi_E$ in $L^1(\Omega_r)$ konvergiert. Nun bestimmen wir ein r_{j+1} im Bereich zwischen $r_j + j$ und $r_j + 2j$ so, dass nach (4.6)

$$\mathcal{H}^{n-1}(E_{k_{j+1}} \cap \partial B_{r_{j+1}}(0)) \leq \frac{V}{j}$$

gilt.

Wenn wir nun diese Teilfolge wiederum mit E_k bezeichnen und die Folge der Radien mit r_k , so schreiben sich diese Eigenschaften als:

$$\begin{aligned} r_{k+1} - r_k &\geq k, \\ \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \partial B_{r_k}(0)) &\leq \frac{V}{k}, \\ \int_{B_{r_{k+1}}} |\varphi_{E_k} - \varphi_E| d\mathcal{L}^n &\leq \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Mengen E_k zerlegen wir nun in jeweils zwei disjunkte Teile, einen beschränkten Teil

$$E_k^b := E_k \cap B_{r_{k+1}}(0)$$

und einen unbeschränkten

$$E_k^u := E_k \setminus B_{r_{k+1}}(0),$$

so dass $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(E_k^b) + \mathcal{L}^n(E_k^u)$ ist. Aufgrund der Glattheit der Mengen E_k können wir schließen

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^b}| \leq \int_{B_{r_{k+1}}} |D\varphi_{E_k}| + \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \partial B_{r_{k+1}}(0)) \quad (4.8)$$

sowie

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^u}| \leq \int_{\Omega \setminus \bar{B}_{r_{k+1}}} |D\varphi_{E_k}| + \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \partial B_{r_{k+1}}(0)). \quad (4.9)$$

Ferner haben wir aufgrund von (4.7) auch

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi_{E_k^b} - \varphi_E| d\mathcal{L}^n &= \int_{B_{r_{k+1}}(0)} |\varphi_{E_k} - \varphi_E| d\mathcal{L}^n + \int_{\Omega \setminus \bar{B}_{r_{k+1}}(0)} |\varphi_E| d\mathcal{L}^n \\ &\leq \frac{1}{k} + \mathcal{L}^n(E \cap \bar{B}_{r_{k+1}}(0)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\varphi_{E_k^b} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi_E \text{ in } L^1(\Omega). \quad (4.10)$$

Hier ist es wichtig festzuhalten, dass eine Konvergenz in ganz $L^1(\Omega)$ vorliegt, nicht nur lokale Konvergenz. Außerdem haben wir gesehen, dass bereits der Teil E_k^b konvergiert, nicht ganz E_k .

Annahme: Die Menge E sei nicht minimierend zu ihrem Volumen, das heißt es existiert eine Menge $F \subset \Omega$ mit

$$\mathcal{L}^n(F) = \mathcal{L}^n(E), \quad \int_{\Omega} |D\varphi_F| = \int_{\Omega} |D\varphi_E| - c \quad (4.11)$$

für ein $c > 0$.

Wir wollen nun einen Widerspruch zur Tatsache herleiten, dass die Mengen E_k eine Minimalfolge bilden. Dazu werden wir im wesentlichen den beschränkten Teil E_k^b durch einen entsprechenden beschränkten Teil der Menge

F ersetzen. Dies wird uns zusammen mit einer Volumen Anpassung eine verbesserte Minimalfolge zum Volumen V und damit den gewünschten Widerstand geben.

Da $r_{k+1} - r_k \geq k$ ist, finden wir wie oben mit Hilfe der Koflächenformel nun auch zur Menge F einen Radius $t_k \in (r_k, r_{k+1})$, so dass

$$\mathcal{H}^{n-1}(F \cap \partial B_{t_k}(0)) \leq \frac{\mathcal{L}^n(F)}{k}$$

ist, und für $F'_{t_k} := F \cap B_{t_k}(0)$ gilt

$$\mathcal{L}^n(F'_{t_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(F) = \mathcal{L}^n(E). \quad (4.12)$$

Da $t_k < r_{k+1}$ ist, gilt

$$F'_{t_k} \cap E_k^u = \emptyset.$$

Somit konvergiert das Volumen von $F'_{t_k} \cup E_k^u$ gegen das richtige Volumen V , die Menge F'_{t_k} füllen wir daher mit einer passenden Kugel um einen geeigneten Punkt zur Menge F_{t_k} auf, so dass

$$\mathcal{L}^n(F_{t_k}) + \mathcal{L}^n(E_k^u) = V$$

ist und

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{F_{t_k}}| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_{F'_{t_k}}| + \alpha(k),$$

wobei $\alpha(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ konvergiert, da nach (4.10) und (4.12) der Volumenausgleich gegen Null geht.

Die passende Kugel um den geeigneten Punkt muss dabei nicht disjunkt zur übrigen Menge liegen. Da unser Gebiet unendlich groß ist, können wir darin jedoch beliebig viele disjunkte Kugeln mit Volumen 1 finden. Um dies einzusehen, wenden wir die Bedingung der geometrischen asymptotischen Flachheit zu den Werten $\varepsilon = 1$ und zum Radius $R = 3$ an. Nach Voraussetzung existiert damit ein $K > 0$, so dass für alle $y \in \partial\Omega$ mit $|y| > K$ gilt: $\partial\Omega \cap B_R(y)$ ist in einem geeigneten rotierten Graphen der maximalen Höhe 1 enthalten. Damit enthält aber $\Omega \cap B_R(y)$ eine Kugelkappe der Höhe 2 und vom Radius 3, darin ist eine Kugel vom Radius 1 und somit vom Volumen sogar größer als 1 enthalten. Durch die Unbeschränktheit des Gebietes Ω können wir unendlich viele solche Punkte y finden, die jeweils Abstand mindestens 6 untereinander

haben, und damit unendlich viele disjunkte Kugeln vom Volumen 1.

Da die Menge E_k^u endliches Volumen hat, finden wir eine Kugel, in welcher maximal $\eta \ll 1$ des Volumens von E_k^u liegt. Hier platzieren wir nun unsere Kugel um den Mittelpunkt mit einem geeigneten Radius zum Volumenausgleich. Wenn wir nun eine Folge η_k nehmen, die gegen Null konvergiert, wird der Radius und damit auch $\alpha(k)$ gegen Null konvergieren. Somit ist die passende Kugel um einen geeigneten Punkt gefunden.

Damit hat $F_{t_k} \cup E_k^u$ das richtige Volumen V und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\varphi_{F_{t_k} \cup E_k^u}| &\leq \int_{B_{t_k}(0)} |D\varphi_F| + \mathcal{H}^{n-1}(F \cap \partial B_{t_k}(0)) + \alpha(k) + \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^u}| \\ &\leq \int_{\Omega} |D\varphi_F| + \frac{\mathcal{L}^n(E)}{k} + \alpha(k) + \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^u}|. \end{aligned}$$

Aufgrund von (4.11) gilt aber damit auch

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{F_{t_k} \cup E_k^u}| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_E| + \frac{\mathcal{L}^n(E)}{k} + \alpha(k) + \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^u}| - c$$

sowie nach (4.10)

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{F_{t_k} \cup E_k^u}| \leq \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^b}| \right) + \frac{\mathcal{L}^n(E)}{k} + \alpha(k) + \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^u}| - c.$$

Dabei ist es hier, wie schon vorher angemerkt, von entscheidender Bedeutung, dass in (4.10) bereits eine Konvergenz der Mengen E_k^b vorliegt, nicht nur von E_k ! Dies ist notwendig, damit auch der Teil $\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^u}|$ weiterverarbeitet werden kann, denn für $k \rightarrow \infty$ folgt daraus nun

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{F_{t_k} \cup E_k^u}| + c &\leq \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^b}| \right) + \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^u}| \right) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^b}| + \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k^u}| \right), \end{aligned}$$

da $\frac{\mathcal{L}^n(E)}{k} + \alpha(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ konvergiert und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

ist. Hierauf können wir nun (4.8) und (4.9) anwenden, so dass wir

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{F_{t_k} \cup E_k^u}| + c \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + 2\mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \partial B_{r_{k+1}}(0)) \right)$$

erhalten. Eine Anwendung von (4.7) liefert endlich

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{F_{t_k} \cup E_k^u}| + c \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + 2\frac{V}{k} \right)$$

und damit einen Widerspruch dazu, dass die Folge E_k eine Minimalfolge ist. Somit ist E ein isoperimetrisches Gebiet zum Volumen $\mathcal{L}^n(E)$ und Schritt 2 ist beendet.

Es bleibt nunmehr nur noch zu zeigen, dass die Menge E auch das „richtige“ Volumen V hat. Im kompakten Fall gilt in Gleichung (4.3) direkt die Gleichheit aufgrund von Konvergenz der E_k in ganz $L^1(\Omega)$, im Allgemeinen ist das natürlich bei nur lokaler Konvergenz falsch. Unser Ziel ist nun zu zeigen, dass in dieser speziellen Situation von geometrischer asymptotischer Flachheit und einer Volumenvergleichsbedingung die Menge E auch das volle Maß V hat.

Zu zeigen ist also nur noch $\mathcal{L}^n(E) = V$.

Zum Beweis dieser Aussage nehmen wir daher in den nächsten Schritten an, dass

$$\mathcal{L}^n(E) < V \tag{4.13}$$

ist.

3. Ein gleichmäßiger Volumenverlust:

Der „Volumenverlust“ der Mengen E_k ist gleichmäßig, das heißt, es existiert $\delta = V - \mathcal{L}^n(E) > 0$, so dass für alle fixierten Radien $R > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(E_k \cap \{|x| > R\}) &= \int_{\Omega \setminus B_R(0)} \varphi_{E_k} d\mathcal{L}^n \\
&= V - \int_{\Omega \cap B_R(0)} \varphi_{E_k} d\mathcal{L}^n \\
&\geq V - \int_{\Omega \cap B_R(0)} |\varphi_E - \varphi_{E_k}| d\mathcal{L}^n - \int_{\Omega \cap B_R(0)} \varphi_E d\mathcal{L}^n \quad (4.14) \\
&\geq V - \mathcal{L}^n(E) - \int_{\Omega \cap B_R(0)} |\varphi_E - \varphi_{E_k}| d\mathcal{L}^n \\
&\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(4.7)} V - \mathcal{L}^n(E) = \delta \stackrel{(4.13)}{>} 0.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, wir können immer einen Index $k_0 = k_0(R)$ finden, so dass alle Mengen E_k mit $k > k_0$ mindestens das Volumen $\frac{\delta}{2}$ außerhalb der Kugel vom Radius R haben. Dieses δ ist dabei eine Konstante, die nicht von k oder R abhängt; lediglich k_0 ist abhängig von R .

Damit sind nun die Voraussetzungen von Lemma 4.1.12 erfüllt mit Volumen $\tilde{V} := V - \frac{\delta}{2}$, der isoperimetrischen (nach Schritt 2) Hindernismenge E mit Volumen $V - \delta < \tilde{V}$, und wir erhalten daher ein ε gemäß Formel (4.1).

Dabei sind jetzt sowohl δ als auch ε fixiert und *nicht* von einem Radius R oder einem Index k abhängig!

4. Zerlegen der Minimalfolgen in beschränkte Teile:

Für die Mengen E_k sind a priori keine Schranken an den Durchmesser vorhanden. Deshalb werden wir durch geschicktes Einfügen von Trennflächen die Mengen „zerlegen“. Dabei werden wir die Menge E_k nicht wirklich verändern, sondern nur jeweils einen kleinen Teil betrachten, von dem wir den Durchmesser kontrollieren können, und dabei werden wir sozusagen durch unseren eingegengten Blick auf das Teilstück neue Perimeteranteile in den Trennflächen erhalten. Den dadurch entstehenden Zuwachs im Perimeter werden wir kon-

trollieren können.

Mit Hilfe des Satzes von Fubini erhalten wir für das Volumen von E_k in einer beliebigen der n Koordinatenrichtungen x^i und für eine beliebige Schrittweite $l > 0$

$$\begin{aligned} V = \mathcal{L}^n(E_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \{x^i = t\}) dt \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{jl}^{(j+1)l} \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \{x^i = t\}) dt \\ &\stackrel{MWS}{\geq} \sum_{j=-\infty}^{\infty} l \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \{x^i = t_j^i\}) \end{aligned}$$

mit $t_j^i \in [jl, (j+1)l]$. Dabei ist

$$\{x^i = t\} := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^i = t\}$$

eine kurze Schreibweise für die Hyperebene durch $(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ mit Normalenvektor $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (der Eintrag ist jeweils an der i -ten Stelle). Der Integrationsbereich \mathbb{R} wird in abzählbar unendlich viele Stücke der Länge l zerlegt und auf jedem dieser Stücke wird der Mittelwertsatz angewandt. In jeder der n Koordinatenrichtungen erhalten wir damit eine Familie von Hyperebenen $\{x^i = t_j^i\}_j$, die durch j von $-\infty$ bis ∞ indiziert ist, mit

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \{x^i = t_j^i\}) \leq \frac{V}{l},$$

und für $l \geq \frac{4nV}{\varepsilon}$ werden wir die Menge E_k nun entlang dieser Hyperebenen „zerschneiden“. Das bedeutet, wir zerlegen den \mathbb{R}^n entlang dieser Hyperebenen in abzählbar unendlich viele Quader der Form ($j_i \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq n$)

$$W_{j_1, \dots, j_n} := [t_{j_1}^1, t_{j_1+1}^1) \times \dots \times [t_{j_n}^n, t_{j_n+1}^n).$$

Da dies abzählbar unendlich viele Quader sind, indizieren wir sie kurz mit $(W^m)_{m \in \mathbb{N}}$. Jede Kantenlänge eines solchen Quaders ist jeweils kleiner oder gleich $2l$, somit ist auch der Durchmesser beschränkt durch $2l\sqrt{n}$.

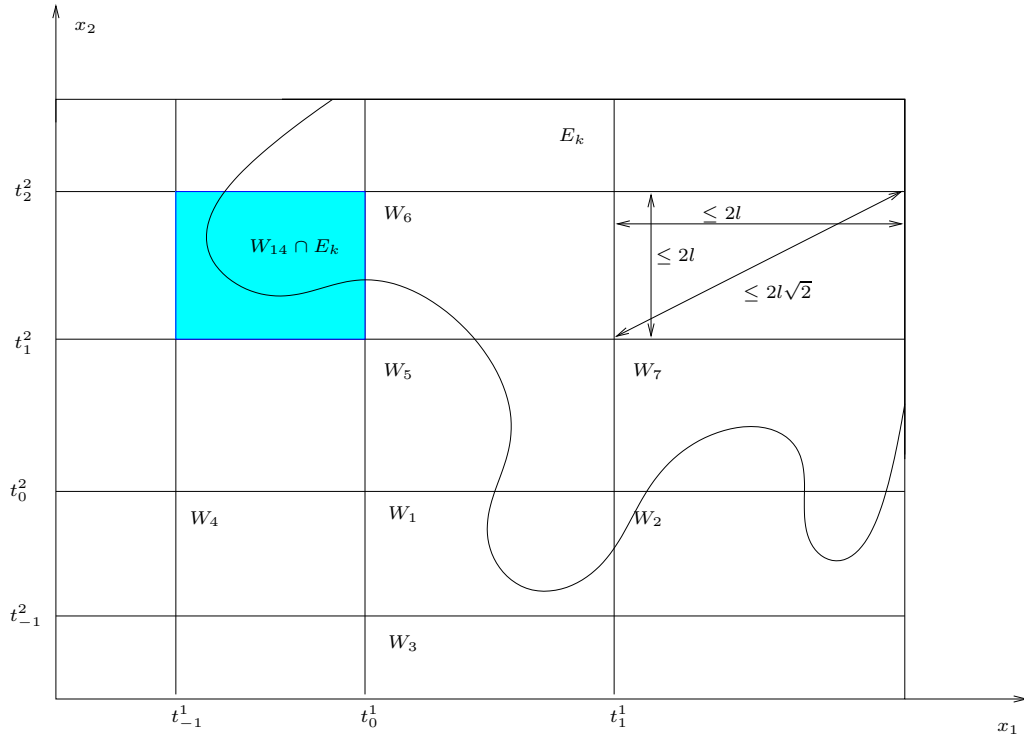


Abbildung 4.4: Die Zerlegung einer Menge E_k durch Rechtecke im \mathbb{R}^2 .

Wir definieren nun

$$G_k^m := E_k \cap W^m.$$

Damit erhalten wir eine neue *Sicht* unserer Minimalfolge als Vereinigung dieser nun ebenfalls im Durchmesser beschränkten Mengen:

$$\begin{aligned}
 E_k &= \bigcup_{m=1}^{\infty} G_k^m, \\
 \mathcal{L}^n(E_k) &= V, \\
 \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + \frac{\varepsilon}{2}, \\
 \text{diam}(G_k^m) &\leq 2l\sqrt{n}.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Diese Aussagen sind bis auf den zweiten Teil der dritten Zeile allesamt klar, und diese sehen wir folgendermaßen ein:

Die Menge G_k^m ist enthalten in W^m , und somit ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| &\leq \int_{\overline{W^m} \cap \Omega} |D\varphi_{G_k^m}| \\ &\leq \int_{\overset{\circ}{W^m} \cap \Omega} |D\varphi_{G_k^m}| + \mathcal{H}^{n-1}(G_k^m \cap \partial W^m). \end{aligned}$$

Damit ist dann (es sei $W^m = [x_{m,u}^1, x_{m,o}^1] \times \cdots \times [x_{m,u}^n, x_{m,o}^n]$)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{\overset{\circ}{W^m} \cap \Omega} |D\varphi_{G_k^m}| + \mathcal{H}^{n-1}(G_k^m \cap \partial W^m) \right) \\ &\leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(G_k^m \cap \partial W^m) \\ &\leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^{n-1}(G_k^m \cap \{x^i = x_{m,u}^i \vee x^i = x_{m,o}^i\}) \\ &\leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(G_k^m \cap \{x^i = x_{m,u}^i\}) \\ &\leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap W^m \cap \{x^i = x_{m,u}^i\}) \\ &\leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(E_k \cap \{x^i = t_j^i\}) \\ &\leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + 2n \frac{V}{l} \\ &\leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Reihen nur nicht-negative Glieder haben. Somit dürfen

wir beliebig umordnen.

Die Familie von Hyperebenen kann natürlich für jede Menge E_k unterschiedlich sein, wichtig ist nur der Umstand, dass solch eine Zerlegung jeweils existiert und die Abschätzungen (4.15) universell gelten. Damit meinen wir, dass der Perimeter bei jeder Menge E_k um maximal $\frac{\varepsilon}{2}$ ansteigt, wenn wir zur Summe der Perimeter der G_k^m übergehen. Auch der Durchmesser dieser G_k^m ist gleichmäßig beschränkt und zwar ohne eine Abhängigkeit von dem Index k . Es ist lediglich eine Abhängigkeit von der Dimension n , dem Volumen V (die beide natürlich unerheblich sind, da fest vorgegeben) und dem bereits fixierten ε gegeben.

5. Untersuchung der einzelnen Teile:

Wir werden nun ein beliebiges, aber fest fixiertes, Segment G_k^m betrachten und in Abhängigkeit von seiner Position Abschätzungen an Volumen und Perimeter erhalten.

Dazu wählen wir zunächst ein $K > 0$ gemäß der Definition von geometrisch asymptotisch flach mit dem Radius $R = 5l\sqrt{n}$ und der Höhe $\varepsilon^* < \frac{\delta}{4M}$, wobei M eine obere Schranke an $\int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}|$ ist.

Wir halten dabei fest, dass ein solches K nur von ε^* abhängt, welches wir wiederum noch vollkommen frei wählen können.

Aufgrund der Konstruktion der G_k^m und von Gleichung (4.14) ist auch

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} G_k^m \cap \{|x| > K\} \right) \geq \delta \quad (4.16)$$

für jedes feste K . Sofern k hinreichend groß ist, wird es also immer Mengen G_k^m geben, die einen Punkt y mit $|y| > K$ enthalten. Diese werden wir nun speziell untersuchen indem wir zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\overline{G_k^m} \cap \partial\Omega = \emptyset$.

In diesem Fall einer sozusagen „inneren“ Menge, die den Rand von Ω nicht trifft, ist der gesamte Rand der Menge G_k^m in der Menge Ω enthalten und somit ist der Perimeter in Ω gleich dem Perimeter im \mathbb{R}^n . Daher ist das Verhältnis von Perimeter und Volumen höchstens so gut wie im Fall des \mathbb{R}^n , das heißt exakt

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| = \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_{G_k^m}| \geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{\mathcal{L}^n(G_k^m)}).$$

Fall 2: $\overline{G_k^m} \cap \partial\Omega \ni y$.

Nach Definition von geometrisch asymptotisch flach existiert nun eine Rotation $A \in SO(n)$ und eine Funktion $g : B_R^{n-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|g| < \varepsilon^*$, so dass

$$\tilde{G}_k^m := A \cdot (G_k^m - y) \subset \text{epigraph } g.$$

Die Projektion auf den \mathbb{R}^{n-1} liefert

$$\mathcal{L}^n(\tilde{G}_k^m \cap \{x^n > \varepsilon^*\}) \geq \mathcal{L}^n(\tilde{G}_k^m) - 2\varepsilon^* \int_{\Omega} |D\varphi_{\tilde{G}_k^m}|. \quad (4.17)$$

Dies sehen wir wie folgt ein: Zunächst ist die Projektion

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

eine Lipschitz-stetige Abbildung und damit ist

$$\mathcal{L}^n(\pi(A) \times [-\varepsilon^*, \varepsilon^*]) = 2\varepsilon^* \mathcal{H}^{n-1}(\pi(A)) \leq 2\varepsilon^* \mathcal{H}^{n-1}(\partial A),$$

da $\pi(A) \subset \pi(\partial A \cap \text{epigraph } g)$ ist für eine beliebige offene Menge $A \subset \text{epigraph } g$. Dazu betrachten wir zu einem $x \in \pi(A)$ den Punkt $x_p := \sup(\pi^{-1}(A))$, indem wir dies als eindimensionale nichtleere Menge ansehen, deren Supremum folglich existiert und automatisch einen Punkt aus $\partial A \cap \text{epigraph } g$ darstellt.

Damit folgt nun die Abschätzung (4.17), wenn wir zudem

$$\tilde{G}_k^m \cap \{x^n \leq \varepsilon^*\} \subset \pi(\tilde{G}_k^m) \times [-\varepsilon^*, \varepsilon^*]$$

beachten.

Kehren wir nun wieder zur Menge G_k^m zurück. Wir haben aufgrund der Rotation des Koordinatensystems und der Beschränktheit von G_k^m

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| = \int_{\text{epigraph } g} |D\varphi_{\tilde{G}_k^m}|.$$

Weiter erhalten wir

$$\int_{\text{epigraph } g} |D\varphi_{\tilde{G}_k^m}| \geq \int_{\text{epigraph } g \cap \{x^n > \varepsilon^*\}} |D\varphi_{\tilde{G}_k^m}|$$

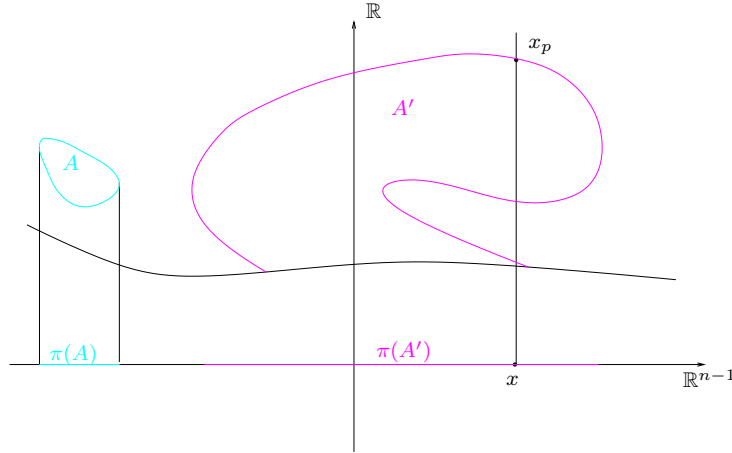


Abbildung 4.5: Die Projektion einer Menge im Epigraphen sowie ein Punkt x mit dem ausgezeichneten Urbildpunkt x_p .

und damit insgesamt (wiederum durch die Beschränktheit der Menge G_k^m)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| &\geq \int_{\text{epigraph } g \cap \{x^n > \varepsilon^*\}} |D\varphi_{\tilde{G}_k^m \cap \{x^n > \varepsilon^*\}}| \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \cap \{x^n > \varepsilon^*\}} |D\varphi_{\tilde{G}_k^m \cap \{x^n > \varepsilon^*\}}|. \end{aligned}$$

Da die Menge $\tilde{G}_k^m \cap \{x^n > \varepsilon^*\}$ in einem Halbraum enthalten ist, kann ihr Verhältnis von Perimeter und Volumen nunmehr höchstens so gut wie im Halbraum sein; oder anders ausgedrückt: sie hat mindestens den Perimeter einer Halbkugel des entsprechenden Volumens im Halbraum. Folglich ergibt sich

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| \geq \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{2\mathcal{L}^n}(\tilde{G}_k^m \cap \{x^n > \varepsilon^*\})).$$

Damit haben wir in beiden Fällen eine Abschätzung des Perimeters nach unten. Die Ungleichung im 1. Fall ist dabei noch wesentlich besser (da sie eine größere untere Schranke liefert). Wir können somit in beiden Fällen den Perimeter nach unten gegen den einer geeigneten (also im Volumen eventuell etwas verringerten) Halbkugel abschätzen.

Aufgrund von (4.16) finden wir zu jedem K und $\tau > 0$ ein $k = k(K, \tau)$ so groß, dass gilt

$$\mathcal{L}^n \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} G_k^m \cap \{|x| > K\} \right) \geq \delta - \tau.$$

Zusammen mit (4.17) folgt damit aber, dass für k groß genug (in Abhängigkeit von K , τ und ε^*) mindestens $\delta - \tau - 2\varepsilon^*M$ an Volumen außerhalb der Kugel vom Radius K liegt und in einer Menge enthalten ist, deren Perimeter sich gegen den einer Halbkugel des entsprechenden Volumens abschätzen lässt. Also ist

$$\sum_{\substack{m=0 \\ G_k^m \cap \{|x| < K\} = \emptyset}}^{\infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| \geq \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{2(\delta - \tau - 2\varepsilon^*M)}). \quad (4.18)$$

6. Umbau zu einer neuen Folge:

Mit Hilfe der Volumenvergleichsbedingung werden wir nun eine neue verbesserte Folge konstruieren. Dazu bemerken wir als erstes, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| &\stackrel{(4.15)}{\geq} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \sum_{\substack{m=0 \\ G_k^m \cap \{|x| < K\} \neq \emptyset}}^{\infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| + \sum_{\substack{m=0 \\ G_k^m \cap \{|x| < K\} = \emptyset}}^{\infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Um die erste Summe zu verarbeiten, verlangen wir o.E., dass K bereits so groß ist, dass

$$\int_{\Omega_K} |D\varphi_E| \geq \int_{\Omega} |D\varphi_E| - \frac{\varepsilon}{8}.$$

Die erste Summe enthält aber auf jeden Fall $G_k \cap B_K(0)$ mit $G_k := \bigcup_{m=0}^{\infty} G_k^m$, also ist

$$\sum_{\substack{m=0 \\ G_k^m \cap \{|x| < K\} \neq \emptyset}}^{\infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| \geq \int_{\Omega_K} |D\varphi_{G_k}|.$$

Da nach (4.2) $\varphi_{G_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi_E$ in $L^1(\Omega_r)$ konvergiert, folgt damit für k wieder groß genug

$$\sum_{\substack{m=0 \\ G_k^m \cap \{|x| < K\} \neq \emptyset}}^{\infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| \geq \int_{\Omega} |D\varphi_E| - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Damit haben wir bereits

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| \geq \int_{\Omega} |D\varphi_E| + \sum_{\substack{m=0 \\ G_k^m \cap \{|x| < K\} = \emptyset}}^{\infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{G_k^m}| - \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Da sich nach (4.18) gerade die zweite Summe abschätzen lässt, erhalten wir weiter

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| \geq \int_{\Omega} |D\varphi_E| + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(B_{2(\delta - \tau - 2\varepsilon^* M)}) - \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Für ε^* und τ genügend klein ist dann

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| \geq \int_{\Omega} |D\varphi_E| + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(B_{2(\delta)}) - \frac{7\varepsilon}{8}.$$

Dabei haben wir insgesamt zunächst eine Mindestgröße für K und k festgesetzt, danach τ und ε^* genügend klein gewählt und dann K endgültig gewählt. Mit Hilfe von k genügend groß folgt wiederum (4.18).

Nun können wir, da die Menge Ω die Volumenvergleichsbedingung erfüllt, nach Lemma 4.1.12 die Menge E zu einer Menge H des richtigen Volumens auffüllen und sparen dabei mindestens ε gegenüber der entsprechenden Halbkugel, also

$$\int_{\Omega} |D\varphi_H| < \int_{\Omega} |D\varphi_E| + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{n-1}(B_{2(\mathcal{L}^n(H) - \mathcal{L}^n(E))}) - \varepsilon.$$

Da $\mathcal{L}^n(H) - \mathcal{L}^n(E) = V - \mathcal{L}^n(E) = \delta$ ist, ergibt dies

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_k}| &\geq \int_{\Omega} |D\varphi_H| + \varepsilon - \frac{7\varepsilon}{8} \\ &= \int_{\Omega} |D\varphi_H| + \frac{\varepsilon}{8}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass E_k eine Minimalfolge ist, also ist die Annahme (4.13) falsch. Das heißt $\mathcal{L}^n(E) = V$, und der Beweis ist somit beendet. \square

Korollar 4.2.2. *Das Paraboloid besitzt für alle $V > 0$ ein isoperimetrisches Gebiet.*

Beweis. Nach Korollar 4.1.3 und Korollar 4.1.10 sind die Voraussetzungen des Theorems erfüllt. \square

Bemerkung 4.2.3. Nach dem Beweis kann man leicht den Eindruck haben, dass damit auch die Beschränktheit der isoperimetrischen Gebiete gezeigt wurde. Immerhin wurden mit Hilfe der Vergleichsbedingung die unbeschränkten Teile durch eine „bessere“ Menge ersetzt. Allerdings geschah dies unter der Voraussetzung, dass die Menge E nicht das volle Maß hat. Im Allgemeinen können wir dieses Verfahren nicht durchführen, dazu müssten wir eine modifizierte Volumenvergleichsbedingung haben, die *beliebige* Mengen auffüllen kann, nicht nur isoperimetrische. Solch eine Bedingung ist allerdings bereits für das Paraboloid schwer nachzuprüfen. \diamond

Korollar 4.2.4. [RR3, 3.5] *Es sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Kegel über einem glatten Gebiet $C \subset \mathbb{S}^n$ mit $\mathcal{H}^n(C) < \mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n)/2$. Dann existiert für alle $V > 0$ ein isoperimetrisches Gebiet in M .*

Bemerkung 4.2.5. In [RR3, 3.5] ist zusätzlich noch der Fall der Gleichheit $\mathcal{H}^n(C) = \mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n)/2$ enthalten, der hier nicht behandelt werden kann.

In der Tat ist mit unserer Methode selbst der Halbraumfall nicht behandelbar, da er keine Volumenvergleichsbedingung erfüllt. Dazu müssten im Halbraum Mengen existieren, die besser als Mengen im Halbraum sind. \diamond

Beweis des Korollars. Aus der Glattheit von C folgt die geometrische asymptotische Flachheit, da sich die Kugeln $B_R(y)$ für $|y| > K$ um einen Randpunkt des Kegels herunterskalieren zu einer Kugel $B_{R/|y|}(y/|y|)$ um einen Randpunkt von C . Um diesen Punkt lässt sich nun C als glattes Gebiet als Graph über seiner Tangentialfläche schreiben, sofern $R/|y| < R/K$ genügend klein ist. Die Kompaktheit von C impliziert nun die Existenz eines K , so dass dieses für alle y mit $|y| > K$ gilt.

Die Volumenvergleichsbedingung folgt aus der Betrachtung von Mengen $M \cap B_r(0)$ bzw. aus dem Aufblasen der Vergleichsmenge. Sei also E' eine

isoperimetrische Menge mit Volumen $0 < V' < V$. Da E' eine isoperimetrische Menge ist, folgt insbesondere, dass sie mindestens so gut wie $M \cap B_r(0)$ für geeignetes r ist, das heißt

$$\mathcal{H}^n(E') \leq c C(n) V'^{\frac{n}{n+1}},$$

wobei $c := \mathcal{H}^n(C)/\mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n)$ und $C(n) = (n+1)\omega_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}$ eine dimensionsabhängige Konstante ist mit

$$\omega_{n+1} := \mathcal{L}^{n+1}(B_1^{n+1}(0)).$$

Für die aufgeblasene, das heißt mit $\lambda = (V/V')^{\frac{1}{n+1}} > 1$ geeignet skalierte Menge $\lambda E' \subset M$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(\lambda E') &\leq \mathcal{H}^n(E') + (\lambda^n - 1)cC(n)V'^{\frac{n}{n+1}} \\ &= \mathcal{H}^n(E') + cC(n)(V^{\frac{n}{n+1}} - V'^{\frac{n}{n+1}}) \\ &\leq \mathcal{H}^n(E') + cC(n)(V - V')^{\frac{n}{n+1}} \\ &\leq \mathcal{H}^n(E') + \frac{1}{2}C(n)(2(V - V'))^{\frac{n}{n+1}} \\ &= \mathcal{H}^n(E') + \frac{1}{2}\mathcal{H}^n(\partial B_{2(V-V')}) \end{aligned}$$

und somit die geforderte Volumenvergleichsbedingung.

Im Fall $V' = 0$, das heißt $E' = \emptyset$, folgt die Bedingung direkt. □

Kapitel 5

Das Paraboloid

In diesem Kapitel werden wir zunächst für beliebige Teilmengen des Paraboloids eine isoperimetrische Ungleichung beweisen, die zwar nicht optimal sein kann, aber für unsere Zwecke ausreichen wird. Mit Hilfe eines Exkurses über Normale Variationen werden wir damit und mit der isoperimetrischen Ungleichung endlich die Beschränktheit der isoperimetrischen Gebiete im Paraboloid zeigen können. Zum Abschluß können wir wiederum auf Ergebnisse von Ros und Vergasta zurückgreifen, um auch eine Abschätzung für den topologischen Typ der Lösung zu erhalten.

Im Folgenden sei nun

$$\Omega := \{(x, y, z) : z > x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Bemerkung 5.0.6. Da wir im Fall $n = 3$ sind, haben wir nach B.2.3 insbesondere volle Regularität, d.h. für isoperimetrische Gebiete ist der singuläre Teil des Randes jeweils leer. \diamond

Bemerkung 5.0.7. Wir erinnern daran, dass wir im Beweis von Korollar 4.1.10 bereits auf Ergebnisse dieses Kapitels zurückgreifen. Die hier bewiesenen Sätze setzen daher zum Teil die Existenz einer isoperimetrischen Menge explizit voraus, da ein Verweis auf Korollar 4.2.2 nicht zulässig ist. Speziell werden wir zeigen: *Wenn* ein isoperimetrisches Gebiet existiert, *dann* muß es auch beschränkt sein. Diese Aussage wurde für 4.1.10 benötigt, damit folgt dann die Existenz beliebiger isoperimetrischer Gebiete nach 4.2.2. Wiederum folgt aus den Ergebnissen dieses Kapitels, dass diese u.a. allesamt beschränkt sein müssen. \diamond

5.1 Eine isoperimetrische Ungleichung

Lemma 5.1.1. *Es existiere eine isoperimetrische Menge E mit Volumen V_0 . Es sei $A \subset \Omega$ mit $\mathcal{L}^3(A) < V_0$. Dann ist*

$$\int_{\Omega} |D\varphi_A| \geq C(\mathcal{L}^3(A))^{\frac{3}{4}}, \quad (5.1)$$

für eine Konstante C , die von E aber nicht von A abhängt.

Beweis. Dazu betrachten wir nun auf dem Paraboloid die Selbstabbildungen

$$\begin{aligned} S_{\lambda} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z) \end{aligned}$$

für $\lambda > 1$. Diese bilden eine Menge $A \subset \Omega$ wieder auf eine Menge $S_{\lambda}A \subset \Omega$ ab mit Volumen

$$\mathcal{L}^3(S_{\lambda}A) = \lambda^4 \mathcal{L}^3(A) \quad (5.2)$$

und Perimeter

$$\lambda^2 \int_{\Omega} |D\varphi_A| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_{S_{\lambda}A}| \leq \lambda^3 \int_{\Omega} |D\varphi_A|. \quad (5.3)$$

Für eine Menge A mit Volumen $\mathcal{L}^3(A) = V < V_0$ definieren wir nun

$$\lambda := \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\frac{1}{4}} > 1,$$

so dass

$$\mathcal{L}^3(S_{\lambda}A) \stackrel{(5.2)}{=} V_0 \quad (5.4)$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D\varphi_A| &\stackrel{(5.3)}{\geq} \frac{1}{\lambda^3} \int_{\Omega} |D\varphi_{S_{\lambda}A}| \\ &\stackrel{(5.4)}{\geq} \frac{1}{\lambda^3} \int_{\Omega} |D\varphi_E| \\ &= V^{\frac{3}{4}} V_0^{-\frac{1}{4}} \int_{\Omega} |D\varphi_E|. \end{aligned}$$

Mit $C := V_0^{-\frac{1}{4}} \int_{\Omega} |D\varphi_E|$, dem skalierten Perimeter der existierenden isoperimetrischen Menge E zum Volumen V_0 , erhalten wir also die Behauptung. \square

Bemerkung 5.1.2. Für $V > V_0$ können wir durch Betrachtung von S_λ für $\lambda < 1$ ebenso eine isoperimetrische Ungleichung erhalten, diese ergibt sich zu

$$\int_{\Omega} |D\varphi_A| \geq CV^{\frac{1}{2}}.$$

◇

Bemerkung 5.1.3. Diese isoperimetrische Ungleichung ist *nicht* optimal, da sie nicht die richtige Skalierung besitzt. Eine isoperimetrische Ungleichung wie im ganzen \mathbb{R}^3 ist aber weder zu erwarten noch für das Folgende notwendig. ◇

5.2 Normale Variationen

Es sei wiederum E ein isoperimetrisches Gebiet mit Rand $\Sigma := \overline{\partial E \cap \Omega}$. Wir betrachten eine Variation von Σ in Richtung ihrer äußeren Normalen, das heißt, es sei

$$f_\varepsilon : \Sigma \rightarrow \text{Bild}(f_\varepsilon) := \Sigma_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \varphi \nu_\Sigma$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} f_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \psi \nu_\Sigma + Z,$$

wobei ν_Σ die äußere Einheitsnormale an Σ ist, $\varphi, \psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegebene reelle Funktionen sind und $Z : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein gegebenes tangentialen Vektorfeld ist. Mit $II_{\partial\Omega}$ bezeichnen wir die zweite Fundamentalform von $\partial\Omega$ bezüglich der äußeren Einheitsnormale ν_Ω an $\partial\Omega$.

Bemerkung 5.2.1. In den Arbeiten [Ku] und [SZ1] wird diese Konstruktion für lokale Minimierer E und *beschränkte* Mengen Ω durchgeführt, was beim Paraboloid erneut nicht gegeben ist. Da wir in der Anwendung (siehe 5.3) aber nur normale Variationen für einen beschränkten Teil betrachten werden, stellt dies keine Einschränkung dar. ◇

Bemerkung 5.2.2. Analog zu [Ku] und [SZ1] existiert für

$$\varphi^2 II_{\partial\Omega}(\nu_\Sigma, \nu_\Sigma) + \langle \nu_\Omega, Z \rangle = 0$$

eine solche Variation mit

$$f_\varepsilon(\Sigma \cap \partial\Omega) \subset \partial\Omega$$

für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Als Menge E_ε bezeichnen wir die von Σ_ε berandete Menge, es ist also für $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$E_\varepsilon := E \cup \bigcup_{t=0}^{\varepsilon} \Sigma_t \subset \Omega.$$

◇

Lemma 5.2.3. *Für eine solche normale Variation gilt*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{H}^2(\Sigma_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= 2H \int_{\Sigma} \varphi d\mathcal{H}^2, \\ \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}^3(E_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Sigma} \varphi d\mathcal{H}^2, \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \mathcal{H}^2(\Sigma_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= (n-1)H \int_{\Sigma} \psi d\mathcal{H}^2 \\ &\quad + \int_{\Sigma} (|\nabla \varphi|^2 + ((n-1)^2 H^2 - |II_\Sigma|^2) \varphi^2) \varphi d\mathcal{H}^2 \\ &\quad - \int_{\partial\Sigma} II_{\partial\Omega}(\nu_\Sigma, \nu_\Sigma) \varphi^2 d\mathcal{H}^1, \\ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \mathcal{L}^3(E_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Sigma} \psi d\mathcal{H}^2 + 2H \int_{\Sigma} \varphi^2 d\mathcal{H}^2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Beweis. Der Beweis ist eine elementare, aber lange Rechnung, die man in [SZ1, 2.2 und 2.5] findet. □

Bemerkung 5.2.4. Diese Formeln gelten auch im Fall beliebiger Dimension, allerdings sind sie etwas technischer in der Formulierung, da mit Hilfe einer Abschneidefunktion die singuläre Menge des Randes ausgenommen werden muss. Für unsere Zwecke genügt diese spezielle Formulierung. Ferner werden wir bereits die Formeln für die zweiten Ableitungen im Folgenden nicht benötigen. \diamond

5.3 Charakterisierung der isoperimetrischen Gebiete

Wir betrachten nun in Analogie zum Beweis der Beschränktheit der isoperimetrischen Gebiete im \mathbb{R}^n (vgl. [Mo, 13.6]) für ein isoperimetrisches Gebiet E :

$$V(r) := \mathcal{L}^3(E \setminus B_r(0)),$$

$$M(r) := \mathcal{H}^2(E \cap \partial B_r(0))$$

sowie

$$A(r) := \mathcal{H}^2(\Sigma \cap (\Omega \setminus B_r(0))).$$

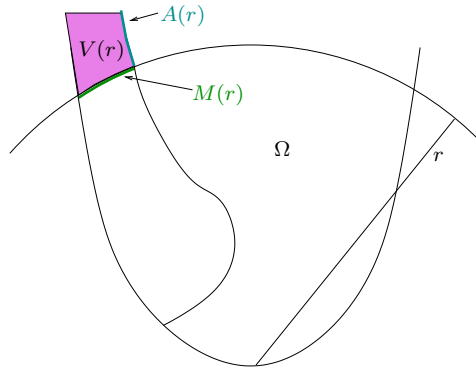


Abbildung 5.1: Das Paraboloid mit einem Schnitt beim Radius r .

Dann ist V eine monoton fallende Funktion mit $V(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$, und nach der Koflächenformel gilt für fast alle r

$$M(r) = -V'(r).$$

Nach (5.5) können wir mit einer normalen Variation das Volumen steigern und steigern gleichzeitig auch die Fläche nur um ein Vielfaches des Volumenzuwachses (eine Ergänzung mit einer Kugel würde $(\Delta V)^{\frac{2}{3}}$ „kosten“). Da die Menge E den Perimeter minimiert, folgt durch einen Vergleich mit einer normalen Variation von $E \cap B_r(0)$ (dazu setzen wir einfach $\varphi = 0$ außerhalb $B_r(0)$) daher mit einer Konstanten $c_1 > 0$

$$-V'(r) + c_1 V(r) \geq A(r). \quad (5.6)$$

Andererseits ergibt eine Anwendung der isoperimetrischen Ungleichung (5.1) für eine geeignete Konstante $c_2 > 0$ (beachte: Es existiert nun eine isoperimetrische Menge E):

$$-V'(r) + A(r) \geq c_2 V(r)^{\frac{3}{4}}. \quad (5.7)$$

Addition von (5.6) und (5.7) ergibt nun mit Konstanten $c_3, c_4 > 0$

$$-2V'(r) \geq c_2 V(r)^{\frac{3}{4}} - c_1 V(r) = c_2 V(r)^{\frac{3}{4}} (1 - c_3 V(r)^{\frac{1}{4}})$$

und damit für r genügend groß

$$-V'(r) \geq c_4 V(r)^{\frac{3}{4}}.$$

Falls nun $V(r) \neq 0$ ist für alle r , können wir schließen

$$4(V^{\frac{1}{4}})' = V^{-\frac{3}{4}} V' \leq -c_4 < 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $V(r)$ immer positiv ist. Also ist $V(r) = 0$ für ein $r > 0$. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 5.3.1. *Es sei E ein isoperimetrisches Gebiet im Paraboloid. Dann ist E beschränkt.*

Mit der Beschränktheit ist der wichtigste Schritt in der Charakterisierung der isoperimetrischen Gebiete getan. Aus den Arbeiten [SZ1] und [RV] folgt nun direkt der Zusammenhang der Lösung und auch eine Abschätzung an das topologische Geschlecht:

Satz 5.3.2. *Es sei E ein isoperimetrisches Gebiet im Paraboloid, dann ist E zusammenhängend. Für den Rand Σ sei $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - r$, dabei ist g das Geschlecht und r die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\partial\Sigma$ (hier ist natürlich der topologische Rand gemeint). Dann gibt es für g und r nur die Möglichkeiten*

(i) $g = 0$ und $r = 1, 2$ oder 3 ;

(ii) $g = 2$ oder 3 und $r = 1$.

Kapitel 6

Schlussbemerkungen

6.1 Zusammenfassung und Ausblick

Mein Ausgangspunkt war die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im \mathbb{R}^n sowie Verallgemeinerungen dieser Eigenschaft auf andere Gebiete, speziell das Ergebnis von Benjamini und Cao für Flächen auf dem Rand des Paraboloids.

Das Ziel war eine Verallgemeinerung ihres Resultats auf das ganze Paraboloid.

Verschiedene Beispiele gaben erste Hinweise, in welchen Fällen überhaupt Lösungen des isoperimetrischen Problems zu erwarten sind. Nach einer Einführung des Begriffs *geometrisch asymptotisch flach* und dem der *Volumenvergleichsbedingung* konnte ich die Existenz einer Lösung des isoperimetrischen Problems in einer großen Klasse von Mengen beweisen, darunter auch für das Paraboloid.

Die Regularitätstheorie konnte dann im Fall des Paraboloids gut weiterentwickelt werden, indem mit Hilfe einer isoperimetrischen Ungleichung die Beschränktheit gezeigt werden konnte.

Was immer noch fehlt, ist die konkrete Form der isoperimetrischen Gebiete. Hier kann man eventuell eine Rotationssymmetrie vermuten. Dazu muss man aber die spezielle Geometrie des Paraboloids ausnutzen, da für allgemeine rotationssymmetrische Mengen eine isoperimetrische Menge nicht rotationssymmetrisch sein muss. In der Tat ist die Frage nach der konkreten Gestalt bei vielen Mengen noch ungeklärt.

6.2 Abstract

My starting point was the isoperimetric property of the sphere in \mathbb{R}^n and some abstractions on other sets, especially the results of Benjamini and Cao on the boundary of a paraboloid.

The aim was to extend their result on the full paraboloid.

Starting with some examples I tried to get the right properties for existence of isoperimetric domains. Two properties turned out to be very useful: *geometric asymptotic flatness* and a *volume comparison condition*. They are enough to prove the existence of solutions. Both conditions are fulfilled by the paraboloid.

There's still a big open problem: the concrete shape of isoperimetric domains. In some way it seems to be okay to conjecture rotational symmetry, but there are counter-examples, if we have just existence of the solutions and rotational symmetry of the set.

Anhang A

BV-Funktionen

„Das ist keine Funktion, sondern eine Zumutung.“
(F.B.)

Entgegen der Vermutungen, die sich durch obiges Zitat einer Person (der ich an dieser Stelle herzlich danke, dass sie mir erlaubte, dieses Zitat zu benutzen) eventuell einstellen, sind BV-Funktionen ausgesprochen hilfreich und ein äußerst starkes Hilfsmittel, wenn auch vielleicht manchmal nicht so intuitiv. Eine ausführliche Einführung in die Theorie der Funktionen von beschränkter Variation findet sich in [EG], [GMS], [Gi1], [Zi] und [AFP]. An dieser Stelle fassen wir nur zunächst die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften ohne Beweise zusammen. Danach betrachten wir ausführlicher einen Approximationssatz für Caccioppoli-Mengen, der meist nur in einer viel schwächeren Form in der Literatur zu finden ist, den wir aber in der hier bewiesenen starken Form benötigen.

Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wird immer als offen vorausgesetzt.

A.1 Definitionen und elementare Eigenschaften

Alle Definitionen und Sätze aus diesem Abschnitt sind den ersten vier Kapiteln aus [Gi1] entnommen.

Definition A.1.1. Es sei $f \in L^1(\Omega)$. Wir definieren

$$\int_{\Omega} |Df| := \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^n : g = (g_1, \dots, g_n) \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ und } |g| \leq 1 \right\}.$$

Die Funktion f heißt von beschränkter Variation, wenn $\int_{\Omega} |Df| < \infty$ ist.

Die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation auf Ω bezeichnen wir mit $BV(\Omega)$. Zusammen mit der Norm

$$\|f\|_{BV} := \|f\|_{L^1} + \int_{\Omega} |Df|$$

wird $BV(\Omega)$ zu einem Banach-Raum.

Bemerkung A.1.2. Es sei $f \in BV(\Omega)$ und Df sei die Ableitung im Sinne der Distributionen. Dann ist Df ein vektorwertiges Radon-Maß mit der totalen Variation $\int_{\Omega} |Df|$ auf Ω . In diesem Sinn ist nun auch $\int_A |Df|$ für beliebige Mengen $A \subset \Omega$ wohldefiniert, die nicht notwendigerweise offen sind. Insbesondere ist der Ausdruck $\int_{\overline{\Omega}} |Df|$ damit auch wohldefiniert. \diamond

Definition A.1.3. Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel-Menge. Wir definieren den Perimeter von E in Ω als

$$P(E, \Omega) := \int_{\Omega} |D\varphi_E|.$$

Wenn die Menge E lokal endlichen Perimeter hat, das heißt, wenn $P(E, \Omega) < \infty$ ist für alle beschränkten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so ist E eine Caccioppoli-Menge.

Damit haben wir eine Verallgemeinerung des Flächeninhaltes vom Rand einer Menge in folgendem Sinne gefunden:

Satz A.1.4. Für eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit C^2 -Rand ist

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega).$$

Im Allgemeinen gilt dies aber nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel A.1.5. Es sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung aller Punkte des $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$, dann definieren wir

$$F := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_i| < 2^{-i}\}.$$

Mit Hilfe des Satzes A.1.6 über die Unterhalbstetigkeit der Halbnorm folgt, dass die Menge F endlichen Perimeter hat. Dazu betrachtet man die Folge $F^j := \bigcup_{i=0}^j F_i$ bzw. die zugehörigen charakteristischen Funktionen. Es ist (beachte wiederum A.1.7)

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{F^j}| \leq \sum_{i=0}^j \int_{\Omega} |D\varphi_{F_i}| \leq \sum_{i=0}^j 2\pi 2^{-i} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 4\pi.$$

Andererseits liegt die Menge dicht in \mathbb{R}^n , der Abschluß ist also ganz \mathbb{R}^n . Da die Menge selbst endliches Volumen hat ist somit $\mathcal{L}^n(\partial E) = \infty$ und damit auch $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) = \infty$.

Satz A.1.6 (Unterhalbstetigkeit der Halbnorm). Es sei $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $BV(\Omega)$, die in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gegen f konvergiert. Dann ist

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j|.$$

Satz A.1.7 (Eigenschaften von Caccioppoli-Mengen).

1. Es sei $\Omega \subset \Omega_1$, dann ist $\int_{\Omega} |D\varphi_E| \leq \int_{\Omega_1} |D\varphi_E|$, mit Gleichheit im Fall $E \subset \subset \Omega$.
2. Es ist $\int_{\Omega} |D\varphi_{E_1 \cup E_2}| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_{E_1}| + \int_{\Omega} |D\varphi_{E_2}|$, mit Gleichheit im Fall $\text{dist}(E_1, E_2) > 0$.
3. Aus $\mathcal{L}^n(E) = 0$ folgt $\int_{\Omega} |D\varphi_E| = 0$.

Satz A.1.8. Es sei $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $BV(\Omega)$, die in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gegen f konvergiert und es sei $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j| = \int_{\Omega} |Df|$. Dann ist für alle offenen $A \subset \Omega$

$$\int_{A \cap \Omega} |Df| \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{A \cap \Omega} |Df_j|.$$

Satz A.1.9 (Approximation in C^∞).

1. Es sei $f \in BV(\Omega)$, dann existiert eine Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$, so dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f - f_j| d\mathcal{L}^n = 0$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j| d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} |Df|.$$

2. Es sei E eine beschränkte Caccioppoli-Menge, dann existiert eine Folge E_j von C^∞ -Mengen, so dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_E - \varphi_{E_j}| d\mathcal{L}^n = 0$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_{E_j}| = \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_E|.$$

Satz A.1.10 (Kompaktheit). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und der Rand sei Lipschitz-stetig. Dann sind beschränkte Mengen in $BV(\Omega)$ relativ kompakt in $L^1(\Omega)$.

Satz A.1.11 (Koflächenformel für BV-Funktionen). Es sei $f \in BV(\Omega)$ und

$$F_t := \{x \in \Omega : f(x) < t\}.$$

Dann ist

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\Omega} |D\varphi_{F_t}| \right) dt.$$

Satz A.1.12 (Isoperimetrische Ungleichung). Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Caccioppoli-Menge. Dann ist

$$\mathcal{L}^n(E)^{\frac{n-1}{n}} \leq c(n) \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_E|.$$

Definition A.1.13 (Spur einer BV-Funktion). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und der Rand sei Lipschitz-stetig. Zu $f \in BV(\Omega)$ existiert dann $\phi \in L^1(\partial\Omega)$, die Spur von f auf dem Rand, so dass für \mathcal{H}^{n-1} -fast alle $x \in \partial\Omega$ gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x) \cap \Omega} |f(z) - \phi(x)| d\mathcal{L}^n(z) = 0.$$

Lemma A.1.14 (Die Wahl eines Vertreters). Es sei E eine Borel-Menge, dann gibt es eine Borel-Menge \tilde{E} , die zu E äquivalent ist (d.h. $\mathcal{L}^n((E \setminus \tilde{E}) \cup (\tilde{E} \setminus E)) = 0$) und für die

$$0 < \mathcal{L}^n(\overline{E} \cap B_\rho(x)) < \mathcal{L}^n(B_1(0))\rho^n$$

gilt für alle $x \in \partial\tilde{E}$ und alle $\rho > 0$.

Definition A.1.15 (Der reduzierte Rand). Der reduzierte Rand ∂^*E einer Caccioppoli-Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ besteht aus allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$, für die folgende drei Bedingungen gelten:

1. $\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E| > 0$ für alle $\rho > 0$,
2. der Grenzwert $\nu(x) := \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{B_\rho(x)} D\varphi_E}{\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E|}$ existiert und
3. $|\nu(x)| = 1$.

Satz A.1.16. Für $|D\varphi_E|$ -fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert die verallgemeinerte Normale $\nu(x)$ mit $|\nu(x)| = 1$, und es ist $D\varphi_E = \nu |D\varphi_E|$.

Bemerkung A.1.17. Für eine Menge E mit C^1 -Rand ist $\partial^*E = \partial E$. \diamond

Definition A.1.18. Für einen Punkt $x \in \partial^*E$ definieren wir den Tangentialraum

$$T(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \nu(x) \cdot (x - y) = 0\}$$

und die beiden Halbräume

$$T^+(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \nu(x) \cdot (x - y) > 0\}$$

und

$$T^-(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \nu(x) \cdot (x - y) < 0\}$$

Satz A.1.19. Für Punkte x aus dem reduzierten Rand $\partial^* E$ gilt

$$\lim_{\rho \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_\rho \cap T^-)}{\rho^n} = 0$$

und

$$\lim_{\rho \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n((B_\rho \setminus E) \cap T^+)}{\rho^n} = 0.$$

Satz A.1.20 (Struktur des reduzierten Randes). Es sei E eine Caccioppoli-Menge, dann ist

$$\partial^* E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \cup N,$$

wobei die C_i kompakte C^1 -Hyperflächen sind und $\int_N |D\varphi_E| = 0$. Des Weiteren gilt für alle Teilmengen $B \subset \partial^* E$

$$\int_B |D\varphi_E| = \mathcal{H}^{n-1}(B)$$

und für alle offenen Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_\Omega |D\varphi_E| = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap \Omega).$$

Außerdem ist

$$\overline{\partial^* E} = \partial E.$$

A.2 Ein spezieller Approximationssatz

Lemma A.2.1 (Lemma von Sard, [Mil]).

1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt ($n \leq m$). Die Menge der kritischen Punkte von f ist definiert als

$$C := \{x \in U : \text{rang } Df|_x < n\}.$$

Dann ist $\mathcal{L}^n(f(C)) = 0$.

2. Es sei $y \notin f(C)$, dann ist $f^{-1}(y) \subset U$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $m - n$.

Satz A.2.2. [GMS, S.343] *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $E \subset \Omega$ eine Caccioppoli-Menge. Dann existiert eine Folge von Mengen E_j mit*

- $\varphi_{E_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi_E$ in $L^1(\Omega)$,
- $\int_{\Omega} |D\varphi_{E_j}| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_E|$, und
- $\partial E_j \cap \Omega$ ist glatt.

Sofern die Menge E beschränkt ist, können wir auch die Mengen E_j beschränkt wählen.

Bemerkung A.2.3. In der angegebenen Quelle wird der Satz ohne den Zusatz der Beschränktheit formuliert und bewiesen, diese ist aber in unserer Anwendung notwendig.

Beweis. Nach A.1.9 lässt sich φ_E durch eine Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ approximieren mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_E - f_j| d\mathcal{L}^n = 0$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j| d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} |D\varphi_E|. \quad (\text{A.1})$$

Dabei können die Funktionen f_j , wie in [Gi1, Thm. 1.17] ausgeführt, durch eine Mollifizierung gebildet werden. Wir können also im Falle der Beschränktheit von E ohne Einschränkung annehmen, dass die Träger der Funktionen f_j ebenfalls alle in einer etwas größeren Kugel enthalten sind. Es sei in dem Fall ohne Einschränkung $E \subset B_D(0)$, und deshalb ist bei geeigneter Wahl der Mollifier $\text{spt } f_j \subset B_{D+1}(0)$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Als nächstes beachten wir, dass für eine Funktion f mit Werten in $[a, b]$ auch jede Mollifizierung Werte in $[a, b]$ hat. Somit haben, da φ_E nur die Werte 0 und 1 annimmt, die Funktionen f_j allesamt Werte im Bereich $[0, 1]$.

Exkurs: Im Beweis von [GMS] wird an dieser Stelle eine glatte Abschneidefunktion η_j mit $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta_j(x) = x$ für $x \in (\frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j})$ und $0 \leq \eta'_j \leq 1$ benutzt. Die Funktionenfolge f_j wird dann durch $\eta_j(f_j)$ ersetzt. Für jedes j ist dann aber $\eta_j(0) > 0$, die so definierten Funktionen müssen daher noch nicht einmal mehr in $L^1(\Omega)$ liegen! Ein triviales Gegenbeispiel wäre die leere

Menge als Teilmenge des ganzen \mathbb{R}^n und eine Approximation durch die konstante Folge $f_j \equiv 0$.

Durch den Hinweis auf die Mollifizierung haben wir diesen Schritt gespart, da die Folge nun bereits a priori Werte in $[0, 1]$ hat. \diamond

Ohne Einschränkungen können wir aufgrund der L^1 -Konvergenz auch annehmen, dass $f_j \rightarrow \varphi_E$ \mathcal{L}^n -fast überall konvergiert.

Wir definieren nun die Mengen

$$E_j(t) := \{x \in \Omega : f_j(x) > t\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |D\varphi_{E_j(t)}| \right) dt &\stackrel{\text{L.v.Fatou}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\int_{\Omega} |D\varphi_{E_j(t)}| \right) dt \\ &\stackrel{\text{Kofl.}}{=} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j| d\mathcal{L}^n \\ &\stackrel{\text{A.1}}{=} \int_{\Omega} |D\varphi_E|. \end{aligned}$$

Da die f_j fast überall gegen die charakteristische Funktion von E konvergieren, und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi_{E_j(t)} - \varphi_E| d\mathcal{L}^n &= \mathcal{L}^n(\{x \in \Omega : f_j(x) > t \wedge \varphi_E(x) = 0\}) \\ &\quad + \mathcal{L}^n(\{x \in \Omega : f_j(x) \leq t \wedge \varphi_E(x) = 1\}) \end{aligned}$$

ist, konvergiert auch für jedes $t \in (0, 1)$ die Funktion $\varphi_{E_j(t)}$ in $L^1(\Omega)$ gegen φ_E . Es folgt nach A.1.6

$$\int_{\Omega} |D\varphi_E| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_j(t)}|.$$

Ein Vergleich mit der vorherigen Ungleichung liefert somit

$$\int_{\Omega} |D\varphi_E| = \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_j(t)}|$$

für fast alle $t \in (0, 1)$. Nach dem Lemma von Sard A.2.1 ist die Menge der kritischen Werte von f_j eine Lebesgue-Nullmenge und damit $\partial E_j(t) \cap \Omega \subset f_j^{-1}(t)$ für fast alle $t \in (0, 1)$ eine glatte Mannigfaltigkeit.

Wir fixieren nun ein $t \in (0, 1)$ derart, dass beide Aussagen für das fixierte t und alle j gelten.

Indem wir $E_j := E_j(t)$ setzen, erhalten wir

- $\varphi_{E_j} \rightarrow \varphi_E$ in $L^1(\Omega)$,
- $\int_{\Omega} |D\varphi_E| = \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\varphi_{E_j}|$ und
- $\partial E_j(t) \cap \Omega$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

Eine erneute Teilfolgenauswahl liefert somit die Behauptung.

Da E_j im Träger von f_j enthalten ist, folgt auch automatisch die Beschränktheit, falls bereits E beschränkt war. \square

Anhang B

Regularitätstheorie

Zunächst werden wir ein Ergebnis von Gonzalez, Massari und Tamanini zur inneren Regularität betrachten, welches sich in einem gewissen Sinn bereits als optimal erweisen wird. Im zweiten, ausführlicheren, Teil gehen wir auf die Arbeit von Grüter zur Randregularität ein. Insbesondere werden wir feststellen, dass das aus [Gr2] bekannte Ergebnis sogar in einem viel allgemeineren Kontext gilt. Diese Verallgemeinerung wird insbesondere unsere betrachteten Mengen abdecken.

B.1 Die Arbeit von Gonzalez, Massari, Tamanini zur inneren Regularität

In [GMT] wird in Theorem 2 folgende Regularitätsaussage bewiesen:

Satz B.1.1. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) offen und E minimiere den Perimeter in Ω zu einem festen Volumen. Dann ist $\partial^* E \cap \Omega$ eine analytische $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und es ist $\mathcal{H}^s((\partial E \setminus \partial^* E) \cap \Omega) = 0$ für alle $s > n-8$.*

Die Menge der singulären Randpunkte von E in Ω hat also somit Hausdorff-Dimension von maximal $(n-8)$.

Damit ist das Problem der inneren Regularität aber bereits vollständig gelöst, da diese Grenze optimal ist. Dies wird durch das Beispiel des Simon-Kegels

$$S := \{x \in \mathbb{R}^8 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\}$$

(siehe zum Beispiel [Gi1]) demonstriert, dass im Allgemeinen durchaus $(n-8)$ -dimensionale Singularitäten vorkommen können.

B.2 Die Arbeit von Grüter zur Randregularität

In der Arbeit [Gr2] wird auf die Randregularität eingegangen, allerdings unter stärkeren Voraussetzungen an das Gebiet Ω . Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^2 -Rand. Für einen Parameter $0 < \sigma < 1$ wird die Klasse der Vergleichsmengen definiert als

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}(\Omega, \sigma) = \left\{ E \subset \Omega : \int_{\Omega} |D\varphi_E| < \infty, \mathcal{L}^n(E) = \sigma \mathcal{L}^n(\Omega) \right\}.$$

Satz B.2.1. 1. Für alle σ zwischen 0 und 1 existiert ein Minimierer in der Klasse \mathcal{C} , d.h. eine Menge $E_\sigma \in \mathcal{C}$ mit

$$\int_{\Omega} |D\varphi_{E_\sigma}| \leq \int_{\Omega} |D\varphi_L|$$

für alle $L \in \mathcal{C}$.

2. Für den Strom $T_\sigma := \partial \llbracket E_\sigma \rrbracket \llcorner \Omega$ gilt

- $\text{sing } T_\sigma = \emptyset$ für $n \leq 7$,
- $\text{sing } T_\sigma$ ist diskret für $n = 8$,
- $\dim(\text{sing } T_\sigma) \leq n - 8$ für $n \geq 8$.

3. Es sei V_σ die zu T_σ assoziierte n -Varifaltigkeit. Dann hat V_σ konstante verallgemeinerte mittlere Krümmung. Insbesondere existiert für alle regulären Punkte von $\text{spt } T_\sigma \cap \Omega$ der mittlere Krümmungsvektor in einer ganzen Umgebung und hat konstante, von x unabhängige Länge.

Am Rand gilt in Punkten $x \in \text{reg } T_\sigma \cap \partial\Omega$, dass sich $\text{spt } T_\sigma$ und $\partial\Omega$ in einer Umgebung von x senkrecht treffen.

Bemerkung B.2.2. Für eine genaue Definition der obigen Begriffe Strom, n -Varifaltigkeit und Träger verweisen wir an dieser Stelle nur auf die Arbeit [Si]. \diamond

Den in der obigen Notation auftretenden Term σ bzw. $\sigma \mathcal{L}^n(\Omega)$ für das zu minimierende Volumen ersetzen wir zunächst durch den Parameter v . Bei

nunmehr fixiertem v schreiben wir für den Strom T_v dann kurz T .

Der Beweis der ersten Aussage, also Existenz der Lösung, macht dabei entscheidenden Gebrauch von der Beschränktheit der Menge Ω .

Die zweite Aussage folgt im Innern, also für $\text{sing } T \cap \Omega$, unmittelbar aus der Arbeit [GMT], siehe B.1.1. Hierbei wird die Beschränktheit nicht benötigt.

Die Kernaussage der Arbeit liegt in der Randregularität. Dabei wird in der Arbeit [Gr2] mit rein lokalen Argumenten nachgewiesen, wieso sich die Argumente aus [GJ] und [Gr3] auch im diesem Fall (also nicht nur für Minimalflächen) übertragen lassen.

Zunächst wird ein beliebiger Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega \cap \text{spt } T$ gewählt. In einer Umgebung davon wird nachgewiesen, dass sich $\text{spt } T$ und Ω in einem schwachen Sinn senkrecht treffen und dass ein verallgemeinerter mittlerer Krümmungsvektor konstanter Länge existiert. Aus [GJ] folgt damit dann bereits, dass die Varifaltigkeit V in einer Umgebung des Randpunktes eine C^1 -Untermannigfaltigkeit mit Rand ist.

Als nächstes wird, wiederum lokal um x_0 , eine sogenannte „fast-minimierende“ Eigenschaft für T nachgewiesen. Damit wiederum wird eine Abschätzung für die Masse des Stromes T in einer Kugel B_ρ , die nahe bei x_0 liegt, bewiesen. Schließlich wird hieraus, nach [Gr3], die Existenz minimierender orientierter Tangentialkegel bewiesen und daraus die Randregularität gefolgert.

Somit wird, bis auf den ersten Teil, keine Beschränktheit von Ω benutzt. Daher ist mit [Gr2] sogar folgendes Ergebnis bewiesen (nun wieder aus der Sprache der Ströme übersetzt):

Satz B.2.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) offen mit C^2 -Rand und E minimiere den Perimeter in Ω zu einem festen Volumen. Dann hat $\partial E \cap \Omega$ konstante verallgemeinerte mittlere Krümmung und der singuläre Teil von $\overline{\partial E \cap \Omega}$ hat Hausdorff-Dimension kleinergleich $(n - 8)$.*

Literaturverzeichnis

- [Ad] Adams, R.A. *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics Vol. 65, Academic Press, New York, London, 1975
- [Al] Almgren, F. J., Jr. *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*. Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1976), no. 165
- [AFP] Ambrosio, L.; Fusco, N.; Pallara, D. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000
- [BdCE] Barbosa, J.L.; do Carmo, M.; Eschenburg, J. *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*. Math. Z. 197 (1988), no. 1, 123–138
- [BR] Bayle, V.; Rosales, C. *Some isoperimetric comparison theorems for convex bodies in Riemannian manifolds* Grenoble, Granada, 2003, <http://de.arxiv.org/pdf/math.DG/0311304>
- [BM] Bérard, P.; Meyer, D. *Inégalités isopérimétriques et applications*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 15 (1982), no. 3, 513–541
- [BS] Bokowski, J.; Sperner, E. *Zerlegung konvexer Körper durch minimale Trennflächen*. J. Reine Angew. Math. 311/312 (1979), 80–100
- [Bo] Boys, C.V. *Seifenblasen und die Kräfte, die sie formen*. Bd. 13 der Sammlung Natur und Wissen, Verlag Kurt Desch, München, 1960
- [BZ] Burago, Yu.D.; Zalgaller, V.A. *Geometric Inequalities*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1988

- [dCa] do Carmo, M.P. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg, Braunschweig, 1983
- [CR] O'Connor, J.J.; Robertson, E.F. *The MacTutor History of Mathematics archive*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>
- [EG] Evans, L.C.; Gariepy, Ronald F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, 1992
- [Fe] Federer, H. *Geometric Measure Theory*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969
- [GMS] Giaquinta, M.; Modica, G.; Souček, J. *Cartesian currents in the calculus of variations I*. Springer Verlag, Berlin, 1998
- [GT] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983
- [Gi1] Giusti, E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Monographs in Mathematics, 80. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984
- [Gi2] Giusti, E. *The equilibrium configuration of liquid drops*. J. Reine Angew. Math. 321 (1981), 53–63
- [GMT] Gonzalez, E.; Massari, U.; Tamanini, I. *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*. Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), no. 1, 25–37
- [Gr1] Grüter, M. *Regularity of weak H -surfaces*. J. Reine Angew. Math. 329 (1981), 1–15
- [Gr2] Grüter, M. *Boundary regularity for solutions of a partitioning problem*. Arch. Rational Mech. Anal. 97 (1987), no. 3, 261–270
- [Gr3] Grüter, M. *Optimal regularity for codimension one minimal surfaces with a free boundary*. Manuscripta Math. 58 (1987), no. 3, 295–343
- [Gr4] Grüter, M. *A remark on isolated singularities at the free boundary of harmonic maps*. Ann. Global Anal. Geom. 15 (1997), no. 2, 173–178
- [GHN] Grüter, M.; Hildebrandt, S.; Nitsche, J. C. C. *Regularity for stationary surfaces of constant mean curvature with free boundaries*. Acta Math. 156 (1986), no. 1-2, 119–152

- [GJ] Grüter, M.; Jost, J. *Allard type regularity results for varifolds with free boundaries*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 13 (1986), no. 1, 129–169
- [HT] Hildebrandt, S.; Tromba A. *Panoptimum. Mathematische Grundmuster des Vollkommenen*. Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH + Co., Heidelberg, 1987
- [Hs] Hsiang, W.Y. *Isoperimetric regions and soap bubbles*. Differential geometry, 229–240, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991
- [Jo1] Jost, J. *Compact Riemann surfaces. An introduction to contemporary mathematics. Second edition*. Springer-Verlag, Berlin, 2002
- [Jo2] Jost, J. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2002
- [Ku] Kuwert, E. *Note on the isoperimetric profile of a convex body*. Geometric analysis and nonlinear partial differential equations, 195–200, Springer, Berlin, 2003
- [LP] Lions, P.-L.; Pacella, F. *Isoperimetric inequalities for convex cones*. Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), no. 2, 477–485
- [Mil] Milnor, J.W.; *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965
- [Mir] Miranda, R. *Algebraic curves and Riemann surfaces*. Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995
- [Mo] Morgan, F. *Geometric measure theory. A beginner's guide*. Second edition. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1995
- [MH] Morgan, F.; Hass, J. *Geodesics and soap bubbles in surfaces*. Math. Z. 223 (1996), no. 2, 185–196
- [MJ] Morgan, F.; Johnson, D.L. *Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds*. Indiana Univ. Math. J. 49 (2000), no. 3, 1017–1041

- [MHH] Morgan, F.; Hutchings, M.; Howards, H. *The isoperimetric problem on surfaces of revolution of decreasing Gauss curvature*. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 11, 4889–4909
- [MR] Morgan, F.; Ritoré, M. *Isoperimetric regions in cones*. Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 6, 2327–2339
- [Ni] Nitsche, J.C.C. *Stationary partitioning of convex bodies*. Arch. Rational Mech. Anal. 89 (1985), no. 1, 1–19
- [Os1] Osserman, R. *The isoperimetric inequality*. Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), no. 6, 1182–1238
- [Ri] Ritoré, M. *Superficies con curvatura media constante*. PhD Thesis (1994), <http://www.ugr.es/~ritore>
- [RR1] Ritoré, M.; Ros, A. *Some updates on isoperimetric problems*. Math. Intelligencer 24 (2002), no. 3, 9–14
- [RR2] Ritoré, M.; Ros, A. *Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms*. Comment. Math. Helv. 67 (1992), no. 2, 293–305
- [RR3] Ritoré, M.; Rosales, C. *Existence and characterization of regions minimizing perimeter under a volume constraint inside Euclidean cones*. Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 11, 4601–4622
- [Ro] Rockafellar, R.T. *Convex Analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970
- [RV] Ros, A.; Vergasta, E. *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*. Geom. Dedicata 56 (1995), no. 1, 19–33
- [Ro1] Ros, A. *The isoperimetric and Willmore problems*. Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray (Bilbao, 2000), 149–161, Contemp. Math., 288, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001
- [Ro2] Ros, A. *The isoperimetric problem*. Lecture series at the Clay Mathematics Institute Summer School on the Global Theory of Minimal Surfaces, summer 2001, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, California, <http://www.ugr.es/~aros/isoper.pdf>

-
- [SY] Schoen, R.; Yau, S.-T. *Lectures on differential geometry*. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, Volume I. International Press, Cambridge, MA, 1994
- [Sch] Schwarz, H.A. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Springer Verlag, Berlin, 1890
- [Si] Simon, L.M. *Lectures on Geometric Measure Theory*. Proc. Australian National University, Australia, 1984
- [SZ1] Sternberg, P.; Zumbrun, K. *On the connectivity of boundaries of sets minimizing perimeter subject to a volume constraint*. Comm. Anal. Geom. 7 (1999), no. 1, 199–220
- [SZ2] Sternberg, P.; Zumbrun, K. *A Poincaré inequality with applications to volume-constrained area-minimizing surfaces*. J. Reine Angew. Math. 503 (1998), 63–85
- [Ste] Steiner, J. *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général*. J. Reine Angew. Math. 24 (1842), 93–152
- [Sto] Stoker, J. J. *Differential geometry*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XX Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney 1969
- [We] Wenthe, H.C. *A note on the stability theorem of J. L. Barbosa and M. Do Carmo for closed surfaces of constant mean curvature*. Pacific J. Math. 147 (1991), no. 2, 375–379
- [Zi] Ziemer, W. P. *Weakly Differentiable Functions*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989

